Übungsblatt 2
Relativitätstheorie II

Sommersemester 2023
Fakultät für Physik, Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1)

Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^2_R$, die Kugeloberfläche mit Radius R, eine zweidimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit ist. (Hinweis: Benutzen Sie zwei Karten, die durch stereografische Projektion von Nordpol bzw. Südpol auf die Ebene $z = 0$ entstehen.)

Aufgabe 2)

Es sei M eine mit einem Atlas ausgestattete Menge. In der Vorlesung wurde eine Teilmenge $G \subseteq M$ als offen definiert, wenn für jede Karte (U, ϕ) die Teilmenge

$$\phi(U \cap G) = \{\phi(P) : P \in U \text{ und } P \in G\} \tag{1}$$

von $\mathbb{R}^n$ offen ist. Zeigen Sie, dass die dadurch definierten offenen Mengen von M eine Topologie bilden.

Aufgabe 3)

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$, ein Punkt auf M, und T_pM der Tangentialraum an M im Punkt p. Sei weiter $x \in T_pM$ ein Tangentialvektor und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf M.
Zeigen Sie, daß $xf = 0$ gilt falls die Funktion f konstant ist.

Aufgabe 4)

Zeigen Sie, daß die in Definition 3.1.12 der Vorlesung eingeführten Tangentialvektoren ∂_i am Punkt $p \in U$ einer Karte (U, φ) einer glatten Mannigfaltigkeit M eine Basis im Tangentialraum T_pM am Punkt p bilden.