Übungsblatt 4
Relativitätstheorie II

Sommersemester 2023
Fakultät für Physik, Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1)

a) Zeigen Sie, dass für jeden zeitartigen Vektor x eines Lorentzraums E (d.h. $g(x, x) > 0$) der Unterraum

$$F_x = \{y \in E : g(x, y) = 0\} \tag{1}$$

ausgestattet mit der Metrik $-g$ ein euklidischer Vektorraum ist.

b) Zeigen Sie: Für zwei zukunftsweisende Vektoren x, z eines Lorentzraums E mit $g(x, x) = g(z, z) = 1$ gilt $g(x, z) \geq 1$.

Aufgabe 2)

Es sei M eine Raumzeit und $p \in M$.

1. Erklären Sie, warum ein zukunftsweisender zeitartiger Tangentialvektor $x \in T_pM$ mit $g(x, x) = 1$ einen momentanen Beobachter im Punkt p repräsentiert.
2. Die Relativgeschwindigkeit zweier Beobachter x, z sei definiert als der raumartige Tangentialvektor $v \in F_x$, der durch $z = \lambda(x + v)$ mit $\lambda > 0$ eindeutig bestimmt ist. (Dabei ist F_x definiert wie in Gleichung (1) in Aufgabe 1.)

   Zeigen Sie, dass die Relativgeschwindigkeit von x und z gerade

   $$v = \frac{z}{g(x, z)} - x \tag{2}$$

   beträgt.
3. Zeigen Sie, dass in der Relativitätstheorie alle Relativgeschwindigkeiten kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, d.h. dass

   $$-1 < g(v, v) \leq 0 \tag{3}$$

   gilt.

Aufgabe 3)

Beweisen Sie, analog zu den Gleichungen (5.3.2) – (5.3.4), einen Ausdruck für die kovariante Ableitung $\nabla_i T^{j_1 \ldots j_p}_{k_1 \ldots k_q}$ eines (p, q)-Tensors.