Übungsblatt 7
Relativitätstheorie II

Sommersemester 2023
Fakultät für Physik, Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1)

Betrachten Sie einen Lichtstrahl der von der Erde zur Venus gesendet und zurückreflektiert wird. Bei einer nicht-relativistischen Betrachtung kann die Zeit die zwischen Aussendung und Rückkehr des Lichtstrahls durch

$$t_{\mathrm{kla}} = \frac{2}{c}\left(\sqrt{r_{\mathrm{E}}^2 - r_0^2} + \sqrt{r_{\mathrm{V}}^2 - r_0^2}\right) \tag{1}$$

ausgedrückt werden. Hier ist r_{E} der Abstand zwischen Sonne und Erde, r_{V} der Abstand zwischen Sonne und Venus, und r_0 ist der Abstand des Lichtstrahls von der Sonne (stets bezogen auf die Schwerpunkte).
In dieser Aufgabe wird der relativistische Fall betrachtet, wobei das Gravitationsfeld der Sonne durch die Schwarzschildmetrik

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{r_{\mathrm{s}}}{r}\right) c^2 \mathrm{d}t^2 - \left(1 - \frac{r_{\mathrm{s}}}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2\right) \tag{2}$$

modelliert wird ($t \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $\theta \in (0, \pi)$, $\phi \in (0, 2\pi)$). Es soll gezeigt werden, dass sich für kleine Schwarzschildradien r_{s} in erster Ordnung die Rückkehrzeit

$$t_{\mathrm{rel}} = \frac{2}{c}\left(\sqrt{r_{\mathrm{E}}^2 - r_0^2} + \sqrt{r_{\mathrm{V}}^2 - r_0^2}\right) \tag{3a}$$

$$+ \frac{2r_{\mathrm{s}}}{c}\log\left[\frac{(r_{\mathrm{E}} + \sqrt{r_{\mathrm{E}}^2 - r_0^2})(r_{\mathrm{V}} + \sqrt{r_{\mathrm{V}}^2 - r_0^2})}{r_0^2}\right] \tag{3b}$$

$$+ \frac{r_{\mathrm{s}}}{c}\left(\sqrt{\frac{r_{\mathrm{E}} - r_0}{r_{\mathrm{E}} + r_0}} + \sqrt{\frac{r_{\mathrm{V}} - r_0}{r_{\mathrm{V}} + r_0}}\right) \tag{3c}$$

ergibt (Stichwort: "Shapiro-Verzögerung"). Hier sind die Größen r_{E}, r_{V} und r_0 als Radien r im Sinne der Schwarzschildkoordinaten (t, r, θ, ϕ) zu interpretieren. Die Gravitation von Erde und Venus und deren Bewegung werden vernachlässigt.

1. Zeigen Sie Gleichung (1).

2. Folgern Sie aus (2), dass die Trajektorie eines Lichtstrahls der in der Ebene $\theta = \pi/2$ verläuft die Differentialgleichung

$$\left(1 - \frac{r_{\mathrm{s}}}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{r_{\mathrm{s}}}{r}\right)} - r^2\dot{\phi}^2 = 0 \tag{4}$$

erfüllt, wobei der Punkt die Ableitung nach dem Parameter der Trajektorie notiert. (In dieser Gleichung und im Folgenden sind t, r, ϕ Funktionen dieses Parameters.)

Nehmen Sie an, dass die Parametrisierung so gewählt ist, dass

$$A := \dot{t}\left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right), \qquad\qquad B := r^2\dot{\phi} \tag{5}$$

Erhaltungsgrößen sind, also Konstanten. (Dass dies möglich ist, folgt aus einer Variante des Noetherschen Theorems.)

3. Zeigen Sie, dass man aus (4), (5) und der Definition von r_0 folgendes erhält:

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{r_0^2 c^2}{1 - r_\mathrm{s}/r_0}. \tag{6}$$

4. Leiten Sie aus (4), (5) und (6) die folgende Formel her

$$\frac{\dot{r}}{\dot{t}} = c\left(1 - \frac{r_\mathrm{s}}{r}\right)\sqrt{1 - \frac{1 - r_\mathrm{s}/r}{1 - r_\mathrm{s}/r_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^2}. \tag{7}$$

5. Erklären Sie, warum aus (7) folgt, dass die Zeit bis zur Rückkehr des Lichtstrahls durch den Ausdruck

$$t_\mathrm{rel} = \frac{2}{c}[F(r_\mathrm{E}) + F(r_\mathrm{V})] \tag{8a}$$

gegeben ist, wobei $F(r_1)$ für $r_1 > r_0$ durch den folgenden Integralausdruck definiert ist

$$F(r_1) := \int_{r_0}^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{(1 - r_\mathrm{s}/r)\sqrt{1 - \frac{1 - r_\mathrm{s}/r}{1 - r_\mathrm{s}/r_0}(r_0/r)^2}}. \tag{8b}$$

6. Berechnen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left.\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1 - x/a}{1 - x/b}\left(\frac{b}{a}\right)^2}}\right|_{x=0} = \frac{b}{2(a+b)\sqrt{a^2 - b^2}} \qquad \text{für } a > b > 0, \tag{9a}$$

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}y}{(y+a)\sqrt{y^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} \qquad \text{für } x > a > 0. \tag{9b}$$

7. Zeigen Sie, dass man die Formel (3) aus (8) erhält, wenn man den Integranden in (8b) bis zur ersten Ordnung in $r_\mathrm{s} \ll 1$ entwickelt. Sie dürfen die Gleichungen (9) verwenden.

8. Diskutieren Sie, inwiefern die Größen die in den Formeln (1) und (3) auftauchen experimentell zugänglich sind.