Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik V: Kontinuumsmechanik **SS 2002**

Fakultät Physik, Universität Stuttgart
PD Dr. Dr. R. Hilfer **Blatt 1**

Aufgabe 1 : Bewegungen

Man interpretiere die folgenden Bewegungen in Bezug auf die Referenzkonfiguration des Einheitswürfels.

a) $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t) = \boldsymbol{a} + kta_2\boldsymbol{e}_1$ (1 Punkt)

b) $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t) = \boldsymbol{a} + kt\boldsymbol{a}$ (1 Punkt)

Aufgabe 2 : Stationäres Temperaturfeld

Ein materieller Punkt bewege sich auf gegebener Bahn $\boldsymbol{x}$ in einem stationären Temperaturfeld θ

$$x_i = x_i(a_j, t): \quad x_1 = a_1 + 2a_2 t, \quad x_2 = a_1 t + a_2, \quad x_3 = 3a_3$$

$$\theta = \theta(x_i) = 2x_1 + 3x_2$$

Beschreiben Sie das Temperaturfeld in materiellen Koordinaten und berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Temperaturänderung für einen speziellen materiellen Punkt.

(2 Punkte)

Aufgabe 3 : Polare Zerlegung

Zeigen Sie, dass man jeden Tensor $\boldsymbol{F}$ mit $\det \boldsymbol{F} > 0$ wie folgt "polar" in ein Produkt zerlegen kann

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}.$$

Dabei ist $\boldsymbol{R}$ eigentlich orthogonal ($\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ und $\det \boldsymbol{R} = +1$), und $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{V}$ sind positiv definit (Ein symmetrischer Tensor $\boldsymbol{A}$ heißt positiv definit, wenn für alle Vektoren $\boldsymbol{a} \neq 0$ gilt: $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a} > 0$).

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Zeigen Sie, dass $(\boldsymbol{F}\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{F}\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{a} > 0$ für alle $\boldsymbol{a} \neq 0$ gilt. (1 Punkt)

b) Setzen Sie $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F})^{1/2}$ und $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{U}^{-1}$. Zeigen Sie, dass dann $\boldsymbol{R}$ eigentlich orthogonal und $\boldsymbol{U}$ positiv definit ist. (2 Punkte)

c) Zeigen Sie Eindeutigkeit der Zerlegung $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}$. Nehmen Sie dazu an, es gäbe zwei verschiedene Zerlegungen ($\boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{R}'\boldsymbol{U}'$) und zeigen Sie durch Einschieben von $\boldsymbol{I}$, dass $\boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{U}'^2$. (1 Punkt)

d) Schließen Sie von $\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T)^{1/2}$ auf die Zerlegung $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}$. (1 Punkt)

Aufgabe 4 : Tensoreigenschaften (schriftlich)

Bestimmen Sie für die Tensoren

$$\boldsymbol{T} = 3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 - 1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 - 1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 + 6\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$$

$$\boldsymbol{M} = 1\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + 4\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 - 1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 + 1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$$

(die Basiseinheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems sind mit $\boldsymbol{e}i$ bezeichnet, $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ ist ein dyadisches Produkt)

a) den transponierten Tensor, (1 Punkt)

b) die Spur ($\mathrm{Sp}\,\boldsymbol{T} = T_{ii}$), (1 Punkt)

c) den Kugeltensor ($\boldsymbol{T}^K = \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$) und den Deviator ($\boldsymbol{T}^D = (T_{ij} - \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij})\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$) sowie die Spur des Kugeltensors und des Deviators, (1 Punkt)

d) und den inversen Tensor. (1 Punkt)