Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik V: Kontinuumsmechanik **SS 2002**

Fakultät Physik, Universität Stuttgart
PD Dr. Dr. R. Hilfer **Blatt 2**

Aufgabe 5 : Zum Deformationsgradienten

a) Bestimmen Sie den Deformationsgradienten für die Deformation $x_1 = \xi_1 + \alpha\xi_2$, $x_2 = \xi_2$, $x_3 = \xi_3$. Beschreiben Sie die Deformation geometrisch. Gibt es materielle Linienelemente $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$, deren Richtung bei der Deformation sich nicht ändert? Wie ändert sich das Volumen? (1 Punkt)

b) Geben Sie die Deformation $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi})$ für eine zweiachsige, isochore Streckung an. Gibt es auch hier Linienelemente $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}$, die bei der Deformation ihre Richtung nicht ändern? (1 Punkt)

c) Bestimmen Sie für das ebene Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v} = \alpha \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \mathbf{x}$ die Abbildung $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ sowie den Deformationsgradienten $\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}, t)$. (1 Punkt)

Aufgabe 6 : Zur geometrischen Linearisierung

a) Bei kleinen Verschiebungen $\boldsymbol{u}$ lässt sich der Deformationsgradient schreiben als $F = I + \delta\, F$ mit $\delta\boldsymbol{F}_{ij} = \partial u_i/\partial\xi_j$. Zeigen Sie, dass für die polare Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$ in linearer Näherung gilt

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I} + \delta\boldsymbol{F}_{sym},$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I} + \delta\boldsymbol{F}_{anti},$$

wobei $\delta\boldsymbol{F}_{sym}$ der symmetrische und $\delta\boldsymbol{F}_{anti}$ der antisymmetrische Anteil von $\delta\boldsymbol{F}$ ist. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass für die Volumendilatation $(\mathrm{d}\tilde{V} - \mathrm{d}V)/\mathrm{d}V = \det\boldsymbol{F} - 1$ gilt:

$$\det\boldsymbol{F} - 1 = \mathrm{Sp}\delta\, F_{sym} = \mathrm{div}\boldsymbol{u}.$$

(1 Punkt)

c) Die Eigenwerte bzw. Eigenvektoren von $\boldsymbol{\varepsilon}$ nennt man Hauptdeformationen bzw. Hauptdeformationsrichtungen. Was bedeuten positive (negative) Eigenwerte? Beschreiben Sie die Verformung einer Kugel mit Radius R ($\boldsymbol{\varepsilon}$ in Diagonalform). Wie ändert sich ihr Volumen? (1 Punkt)

d) Eine Dehnungsfläche ist definiert durch $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{x} = const$. Zeigen Sie, dass bei reiner Verzerrung die Verschiebung $\boldsymbol{u}$ eines materiellen Punktes P parallel zur Normalen $\boldsymbol{n}$ der Dehnungsfläche an der Stelle $\boldsymbol{x}_P$ ist (Poinsotsche Konstruktion). Wo findet die Poinsotsche Konstruktion außerhalb der Kontinuumsmechanik Anwendung? (1 Punkt)

Aufgabe 7 : Homogene Deformationen (schriftlich)

Gegeben sei ein Verschiebungsfeld $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}$. Ist $\boldsymbol{A}$ unabhängig von $\boldsymbol{\xi}$, so handelt es sich um eine homogene Deformation. Bestimmen Sie für folgende homogene Deformationen ($0 < c < 1$) den Greenschen Verzerrungstensor, den Rechts-Streck-Tensor $\boldsymbol{U}$ mit seinen Hauptachsen, den Drehtensor $\boldsymbol{R}$ und den Drehwinkel φ. Skizzieren Sie jeweils die Deformation eines Einheitskreises.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

(3 Punkte)