Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik V: Kontinuumsmechanik **SS 2002**

Fakultät Physik, Universität Stuttgart
PD Dr. Dr. R. Hilfer **Blatt 4**

Aufgabe 11 : Zum Reynoldschen Transporttheorem

In der Vorlesung haben Sie das Reynoldsche Transporttheorem

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = \int_B \left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} + \Phi \mathrm{div}\ v\right) \mathrm{dV} \qquad \text{mit } \Psi = \int_B \Phi \mathrm{dV}$$

kennengelernt und mit seiner Hilfe aus der Massenerhaltung die Kontinuitätsgleichung der Massendichte abgeleitet. Analog lassen sich mit seiner Hilfe auch die Kontinuitätsgleichungen für weitere dichteartige Größen herleiten.

a) Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen ohne Materie die Kontinuitätsgleichung der Ladungsdichte her.
Benutzen Sie nun das Reynoldsche Transporttheorem für eine alternative Herleitung, indem Sie von der Ladungserhaltung ausgehen. (2 Punkte)

b) Die Energiedichte des freien elektromagnetischen Feldes lautet in SI-Einheiten $\mathrm{u} = \frac{\epsilon_0}{2}\ E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\ B^2$.
Wie lauten die dazugehörigen Bilanzgleichungen, die Sie mit Hilfe der homogenen Maxwell-Gleichungen bzw. mit dem Reynoldschen Transporttheorem gewinnen? Zeigen Sie die Äquivalenz beider Gleichungen, indem Sie explizit ebene elektromagnetische Wellen annehmen. (2 Punkte)

c) Wie lautet die Kontinuitätsgleichung der Quantenmechanik und welche Erhaltungsgröße spielt hierbei eine Rolle? (1 Punkt)

d) Wie sieht die lokale Bilanzgleichung für die Impulsdichte $p = \rho\ v$ aus? Interpretieren Sie die dabei auftretenden Terme. (1 Punkt)

Aufgabe 12 : Mohrscher Spannungskreis in 2D

Gegeben sei ein ebenes Spannungsfeld, ausgedrückt durch einen Cauchy-Spannungstensor $\boldsymbol{T}$. t_n und t_s seien Normal- und Schubspannung bezüglich einer Geraden, deren Normale $\boldsymbol{n}$ im Hauptachsensystem die Komponenten n_i $(i = (1,2))$ besitze. Für die Hauptspannungen σ_i gelte die Beziehung $\sigma_1 > \sigma_2$.

a) Berechnen Sie aus den Hauptspannungen σ_i die Normalspannung t_n sowie den Ausdruck $t_n^2 + t_s^2$.
(Ergebnis: $t_n = n_1^2\sigma_1 + n_2^2\sigma_2,\ t_n^2 + t_s^2 = n_1^2\sigma_1^2 + n_2^2\sigma_2^2$.) (1 Punkt)

b) Bestimmen Sie t_s in Abhängigkeit von t_n Eliminieren Sie hierzu n_1 und n_2 aus den resultierenden Gleichungen unter Zuhilfenahme der Beziehung $n_1^2 + n_2^2 = 1$.

Hinweis: Als Ergebnis erhalten Sie den Mohrschen Spannungskreis $t_s^2 + [t_n - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}]^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2$. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass die maximale Schubspannung durch $(t_s)_{max} = \frac{1}{2}\{(t_n)_{max} - (t_n)_{min}\}$ gegeben ist. (0,5 Punkte)

Aufgabe 13 : Mohrsche Spannungskreise (schriftlich)

In der Aufgabe 12 haben Sie für ein zweidimensionales Spannungsfeld den Mohrschen Spannungskreis berechnet, der bei gegebenem Spannungstensor eine eindeutige Beziehung zwischen Normal- und Schubspannung herstellt. Im dreidimensionalen Fall existiert diese eindeutige Beziehung nicht mehr. Jedoch gibt es drei Mohrsche Spannungskreise, die die Normal- und Schubspannungen auf ein bestimmtes Gebiet eingrenzen. Das Gebiet soll hier ermittelt werden. Dazu sei ein dreidimensionales Spannungsfeld gegeben, für dessen Hauptspannungen $\sigma_i,\ i = 1,2,3$ die Beziehung $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ gelte.

a) Berechnen Sie die Normalspannung t_n sowie den Ausdruck $t_n^2 + t_s^2$ (t_s...Schubspannung) in Abhängigkeit der Hauptspannungen σ_i und der Komponenten n_i des Flächenvektors. Arbeiten Sie dazu im Eigensystem des Spannungstensors. (1 Punkt)

b) Leiten Sie aus den Beziehungen in a) mit Hilfe der Normierungsbedingung für den Flächenvektor, $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, drei Gleichungen ab (z. B.: $n_1^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) = t_s^2 + (t_n - \sigma_2)(t_n - \sigma_3)$). Mit Hilfe von $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ folgen daraus drei Ungleichungen, die das gesuchte Gebiet im $t_n - t_s$ Diagramm beschreiben. Was sind die Mohrschen Spannungkreise? (2 Punkte)

c) Wodurch ist die maximale Schubspannung gegeben? (0,5 Punkte)