Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik V: Kontinuumsmechanik **SS 2002**

Fakultät Physik, Universität Stuttgart
PD Dr. Dr. R. Hilfer **Blatt 6**

Aufgabe 17 : Maxwellscher Spannungstensor

Betrachten Sie ein System von geladenen Teilchen, auf die nur die Lorentzkraft des elektromagnetischen Feldes wirken soll.

a) Begründen Sie die mechanische Impulsbilanz für den Gesamtimpuls $\boldsymbol{p}_V^{(mech)}$:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}_V^{(mech)} = \int d^3r\,\rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = \int_V d^3r(\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}).$$

(1 Punkt)

b) Eliminieren Sie ρ und $\boldsymbol{j}$ durch die inhomogenen Maxwell-Gleichungen. Bringen Sie die Terme auf die Form

$$\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}+\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{B}-\frac{d}{dt}(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})-\boldsymbol{D}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}$$

Hinweis: Homogene Maxwell-Gleichungen:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \quad (1)$$
$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}+\dot{\boldsymbol{B}} = 0 \quad (2)$$

Inhomogene Maxwell-Gleichungen:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho \quad (3)$$
$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}-\dot{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{j} \quad (4)$$

Materialgleichungen (lineares Medium):

$$\boldsymbol{B} = \mu_r\mu_0\boldsymbol{H} \quad (5)$$
$$\boldsymbol{D} = \epsilon_r\epsilon_0\boldsymbol{E} \quad (6)$$

(2 Punkte)

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Impulses des elektromagnetischen Feldes

$$\boldsymbol{p}_V^{(Feld)} = \int_V d^3r(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B})$$

die Gesamtimpulsbilanz $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_V^{(mech)}+\boldsymbol{p}_V^{(Feld)})$. Sie ist symmetrisch in magnetischen und elektrischen Größen. (1 Punkt)

d) Zeigen Sie, dass für ein lineares, homogenes Medium gilt:

$$(\boldsymbol{E}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})_i = \epsilon_r\epsilon_0\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(E_iE_j-\frac{1}{2}E^2\delta_{ij})$$

und analog:

$$(\boldsymbol{H}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H})_i = \frac{1}{\mu_r\mu_0}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}(B_iB_j-\frac{1}{2}B^2\delta_{ij}).$$

(1 Punkt)

e) Mit Hilfe des Maxwellschen Spannungstensors $\boldsymbol{T}$ kann die Impulsbilanz wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_V^{(mech)}+\boldsymbol{p}_V^{(Feld)}) = \int_V d^3r\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}T_{ij}.$$

Geben Sie T_{ij} an. (1 Punkt)

f) Formen Sie das Ergebnis aus e) mit Hilfe des Gaußschen Satzes um. Interpretieren Sie das Ergebnis. (1 Punkt)

g) Berechnen Sie die Kraft zwischen den Platten eines Kondensators ($\boldsymbol{B}=0, \boldsymbol{E}=(0,0,-E)$). (1 Punkt)

Aufgabe 18 : Kirchhoffsche Knotenregel (schriftlich)

Aus der Ladungserhaltung folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,\boldsymbol{j} = 0.$$

Im Folgenden wird der stationäre Fall angenommen ($\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$).

a) Zeigen Sie, dass im stationären Fall durch jeden Querschnitt derselbe Strom fließt. Zerteilen Sie hierfür exemplarisch die Oberfläche $S(V)$ eines Volumens V, durch die ein Strom fließe, in zwei Teile. (1 Punkt)

b) Vier Leiter seien durch einen Knoten, der sich in einem Gebiet mit dem Volumen V befindet, verbunden. Zwei Leiter sollen einen Strom (I_1 bzw. I_2) in das Gebiet hineintragen und zwei Leiter sollen einen Strom (I_3 bzw. I_4) hinaustragen. Zeigen Sie, dass am Leiterknoten die Summe der zufließenden gleich die Summe der abfließenden Ströme ist (*Kirchhoff*sche Knotenregel). (1 Punkt)