Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik V: Kontinuumsmechanik **SS 2002**

Fakultät Physik, Universität Stuttgart
PD Dr. Dr. R. Hilfer **Blatt 7**

Aufgabe 19 : Stabilitätsbedingung

Die elastische Energie eines Festkörpers schreibt sich in hookescher Näherung als

$$W = \frac{1}{2} E_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}.$$

a) Für ein isotropes Medium gilt

$$E_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Wie lautet der Spannungstensor $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\epsilon_{kl}$ und die elastische Energie in Abhängigkeit von ϵ_{ij}? (1 Punkt)

b) Die elastische Energie W ist eine quadratische Form der 6 unabhängigen Komponenten des Verzerrungstensors, die für jede Wahl des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\epsilon} \neq 0$ größer als null sein muss (warum?). Leiten Sie hieraus Bedingungen für μ und λ her.
Hinweis:
1. Möglichkeit: Schreiben Sie die elastische Energie als quadratische Form. Welche Bedingung gilt für die Eigenwerte der entsprechenden Matrix?
2. Möglichkeit: Zerlegen Sie den Verzerrungstensor $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)} = 1/3\epsilon_{kk}\delta_{ij} + (\epsilon_{ij} - 1/3\epsilon_{kk}\delta_{ij})$ (physikalische Bedeutung?) und schreiben Sie die elastische Energie in Abhängigkeit von $\epsilon_{ij}^{(1)}$ und $\epsilon_{ij}^{(2)}$. (3 Punkte)

Aufgabe 20 : Thermoelastisches Material

a) Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung eines thermoelastischen Materials lautet

$$\sigma = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \mathrm{Sp}\boldsymbol{\epsilon}\,\mathbf{1} - \beta(T - T_0)\,\mathbf{1},$$

wobei T_0 eine Referenztemperatur ist. Bestimmen Sie β derart, dass ohne äußere Spannung der lineare thermische Ausdehnungskoeffizient α beträgt. (2 Punkte)

b) Betrachten Sie nun eine inhomogene Temperaturverteilung T. Welcher Differentialgleichung muß T gehorchen, damit sich ein spannungsfreier Zustand ergibt?
Hinweis: Verwenden Sie die Kompatibilitätsbedingungen für $\boldsymbol{\epsilon}$ aus der Vorlesung. (2 Punkte)

Aufgabe 21 : Zu den elastischen Konstanten (schriftlich)

a) Zeigen Sie, dass bei einem kubischen Material von den 21 Komponenten des elastischen Tensors nur drei linear unabhängig sind. Gehen Sie dabei von einem Koordinatensystem aus, bei dem x-, y- und z-Achse entlang der 4-zähligen Richtungen zeigen, und wählen Sie geeignete Symmetrieoperationen $\mathbf{R}$ aus, um mittels $E_{ijkl} = E_{i'j'k'l'}R_{i'i}R_{j'j}R_{k'k}R_{l'l}$ zu zeigen, dass gewisse Komponenten gleich sind bzw. verschwinden. (2 Punkte)

b) Wie lauten die Stabilitätsbedingungen (siehe auch Aufgabe 19b) für die drei elastische Konstanten aus a)? (1 Punkt)