Übungen zur Vorlesung Theoretische Physik V: Kontinuumsmechanik **SS 2002**

Fakultät Physik, Universität Stuttgart
PD Dr. Dr. R. Hilfer **Blatt 11**

Aufgabe 31 : Erdbebenwellen

Bei Erdbebenwellen kommen zwei Wellentypen vor: Longitudinalwellen und Scherwellen. In der obersten Erdschicht unterscheidet man zwischen Oberflächenwellen und Love-Wellen, wobei beide vom Scherwellentyp sind. Love-Wellen treten in einer unendlich ausgedehnten Schicht endlicher Dicke auf (z.B. der obersten Erdschicht). Die Welle schwingt dabei parallel zur Schichtgrenze und beide Berandungsflächen sind von Bedeutung. Es liegt ein Wellenleiter vor.

Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist die Bewegungsgleichung eines elastischen Körpers:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \quad , \tag{1}$$

für die wir fortschreitende Wellen als Lösungen suchen.

a) Die Schicht endlicher Dicke H liege in der (x, y)-Ebene. O.B.d.A. lassen wir unsere Welle in x-Richtung laufen. Das Verschiebungsfeld zeigt dann in y-Richtung: $u_x = u_z = 0$ und $u_y = v(x, z, t)$, wobei wir eine Abhängigkeit von der Ortskoordinate y vernachlässigen. Welche Bewegungsgleichung für $v(x, z, t)$ folgt aus Gl. (1), wenn man für $\boldsymbol{\sigma}$ die Spannungs-Dehnungsrelation eines isotropen, elastischen Körpers verwendet? (2 Punkte)

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe eines Separationsansatzes

$$v = g(z) \sin(kx - \omega t) \quad , \tag{2}$$

der eine in x-Richtung fortlaufende Welle mit z-abhängiger Amplitude darstellt. Sie erhalten eine Differentialgleichung für $g(z)$. Bestimmen Sie die freien Parameter in Ihrer Lösung mit Hilfe der folgenden Randbedingungen: der Spannungsvektor verschwinde an der Oberfläche ($z = 0$) und die Verschiebung am Boden des Wellenleiters ($z = -H$) sei Null. (1 Punkt)

c) Sie werden feststellen, dass aufgrund der Randbedingungen ω und k durch die sogenannte Dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$ miteinander verknüpft sind. Skizzieren Sie die Dispersionsrelation und diskutieren Sie sie. Welche Bedeutung hat $c = \sqrt{\mu/\rho}$? Fallen Ihnen ähnliche Wellentypen aus anderen Bereichen der Physik ein? (1 Punkt)

Aufgabe 32 : Ebene Potentialströmung

a) Wir behandeln eine ebene, stationäre, wirbelfreie Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Zeigen Sie: Die Geschwindigkeit lässt sich als Gradient einer zweidimensionalen harmonischen Funktion ϕ darstellen, d.h. $\mathbf{v} = \nabla u$ mit $\Delta u = 0$. Eine derartige Funktion u nennt man Geschwindigkeitspotential. (1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass der Realteil $u(x, y)$ einer analytischen komplexen Funktion $\Phi(z) = \Phi(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ eine harmonische Funktion ist. (1 Punkt)

c) Berechnen Sie das Geschwindigkeitsfeld und die Stromlinien für das komplexe Geschwindigkeitspotential $\Phi(z) = (a + ib) \ln z,\ a, b \in \mathbf{R}$. (1 Punkt)

d) Diskutieren Sie das Strömungsfeld für $\Phi(z) = a\,(\ln(z + x_0) - \ln(z - x_0))\,,\ a, x_0 \in \mathbf{R}$. Wie lautet das Geschwindigkeitsfeld im Limes $x_0 \to 0,\ 2ax_0 = \mu = \text{const.}$? (1 Punkt)

Aufgabe 33 : Wertebereich der Querkontraktionszahl (schriftlich)

Auf welchen Wertebereich wird durch die Stabilitätsbedingung für isotropes Material

$$2\mu + 3\lambda > 0, \quad \mu > 0$$

die Querkontraktionszahl ν mit

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$$

eingeschränkt? (2 Punkte)