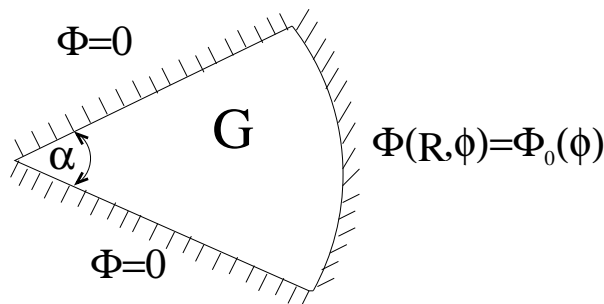


Übungsblatt 7
Theoretische Physik III: Elektrodynamik
SS 2014

Fakultät Mathematik und Physik, Universität Stuttgart
 Prof. Dr. Dr. R. Hilfer
 A. Lemmer (andreas.lemmer@icp.uni-stuttgart.de)

Aufgabe 1 (Votieraufgabe)

4 Punkte



Lösen Sie das zweidimensionale Randwertproblem für das elektrostatische Potential in dem im Schaubild gezeigten Gebiet durch Separation der Variablen. Das Gebiet G besitze keine Ladung. Die Potentialfunktion $\Phi(\mathbf{r})$ nimmt die Randwerte $\Phi = 0$ auf beiden Seiten des Winkels α und $\Phi = \Phi_0(\varphi)$ auf dem Kreisbogen an. Berechnen Sie $\Phi(\mathbf{r})$ in G .

Aufgabe 2 (Votieraufgabe)

4 Punkte

Man betrachte das zweidimensionale Potentialproblem

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r})$$

für eine gegebene Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r})$ innerhalb des Einheitskreises

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi) = \cos(\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\varphi)\mathbf{e}_y \quad , \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

mit Dirichlet-Randbedingungen $\phi(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r})$ auf dem Kreis.

Bestimmen Sie die Greensche Funktion und berechnen Sie das Potential $\phi(\mathbf{r})$ innerhalb des Kreises für $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r})$ und $\phi_0(\mathbf{r}) = \cos(\varphi)$.

Hinweise: Die Greensche Funktion für Dirichlet-Randbedingungen $G(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ kann geschrieben werden als Summe

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = G_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{s}) + f(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \quad ,$$

wobei $G_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ die Greensche Funktion für ein im Unendlichen verschwindendes Potential $\phi(\mathbf{r})$ ist. Bestimmen Sie $f(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ so, dass $G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = 0$ auf dem Kreis $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi)$ gilt. Dies kann erreicht werden mit der Methode der Bildladungen. Für jeden Punkt \mathbf{s}_A mit $\rho(\mathbf{s}_A) \neq 0$ innerhalb des Kreises kann man einen Bildpunkt \mathbf{s}_B außerhalb des Kreises finden, so dass $G_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{s}_A) - G_\infty(\mathbf{r}, \mathbf{s}_B)$ konstant auf dem Kreis ist.

Aufgabe 3 (Hausaufgabe)

5 Punkte

Berechnen Sie das Potential der Flächenladungsdichte $\rho(\mathbf{r}) = \sigma(\vartheta, \varphi) \delta(|\mathbf{r}| - R)$ auf der Kugel $\mathbb{B}(\mathbf{0}, R)$ mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$ und Radius R für alle $\sigma(\vartheta, \varphi)$ mit azimuthaler Symmetrie, d.h. von der Form $\sigma(\vartheta, \varphi) = \sigma(\vartheta)$.

Hinweis: Entwickeln Sie $\sigma(\vartheta)$ in Legendre-Polynome $P_l(\cos \vartheta)$ als

$$\sigma(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sigma_l P_l(\cos \vartheta)$$

mit den Koeffizienten

$$\sigma_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma(\vartheta) P_l(\cos \vartheta) d(\cos \vartheta)$$

und benutzen Sie die allgemeine Formel aus der Vorlesung für Potentiale mit azimuthaler Symmetrie $\phi(r, \vartheta, \varphi) = \phi(r, \vartheta)$.

Aufgabe 4 (Hausaufgabe)

3 Punkte

Die komplexe Funktion $f : \mathbb{G} \mapsto \mathbb{C}$, $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ sei holomorph in $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}$.

Zeigen Sie, dass die reellen Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \mathbb{G}\}$ die Potentialgleichung erfüllen.