Übungsblatt 12
Theoretische Physik V : Kontinuumsmechanik
WS 2009/10

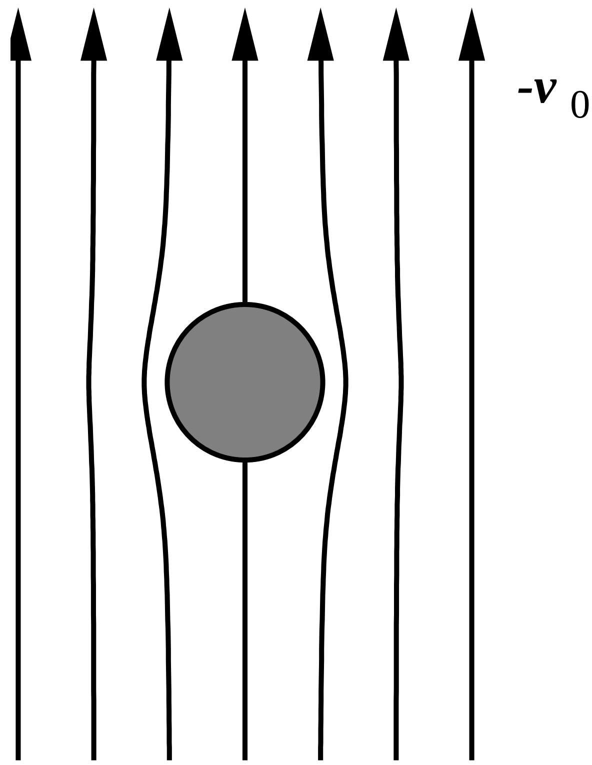
Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe): **(4 Punkte)**

Im folgenden soll die Widerstandskraft auf eine Kugel mit dem Radius R, die sich in einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit mit einer konstanten Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ bewegt, bestimmt werden (s. Abb.). Dieses Problem ist äquivalent zu der Beschreibung einer ruhenden Kugel, die von einer Flüssigkeit, die im Unendlichen die Geschwindigkeit $-\boldsymbol{v}_0$ besitzt, umströmt wird. Sie haben in der Vorlesung die Navier-Stokes-Gleichungen für eine inkompressible Flüssigkeit kennengelernt:

$$\varrho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{dt}} = \boldsymbol{k} - \nabla p + \eta \Delta \boldsymbol{v}$$

Im folgenden wird die Erdgravitation vernachlässigt und man nimmt an, dass die Geschwindigkeiten so klein sind, dass die Trägheitsterme ($v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}$ usw.) auch vernachlässigt werden können.



a) Wie sehen die Navier-Stokes-Gleichungen unter den obigen Annahmen aus? Wählen Sie nun für die Geschwindigkeit der Strömung den Ansatz

$$\boldsymbol{v} = \nabla \Phi + \boldsymbol{w} \ ,$$

d. h. die Geschwindigkeit wird in einen wirbelfreien Anteil und einen wirbelbehafteten restlichen Anteil zerlegt. Zeigen Sie, dass man eine mögliche Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen erhält, wenn man $\Delta \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ fordert. Was für eine Gleichung erhalten Sie dabei für den Druck? Welche Gleichung für Φ und $\boldsymbol{w}$ ergibt sich aus der Annahme der Inkompressibilität?

Wie sehen die Randbedingungen für Φ und $\boldsymbol{w}$ am Rand der Kugel und im Unendlichen aus? Das Problem ist nun vollständig bestimmt.

b) Nehmen Sie zur Lösung des Problems zunächst die folgenden Ansätze:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= C\frac{\boldsymbol{v}_0}{r} \quad ; \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \Phi &= f(r)\,(\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{r}) \ . \end{aligned}$$

Wie sehen die Randbedingungen für Φ und schließlich für $f(r)$ aus? Welche DGL ergibt sich für $f(r)$? Lösen Sie die DGL und zeigen Sie, dass für das Geschwindigkeitsfeld gilt:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 \left(\frac{R^3}{4r^3} + \frac{3R}{4r} - 1 \right) + \frac{3R}{4r^3}(\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{r}) \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \boldsymbol{r} \ .$$

c) Mit Hilfe des Ergebnisses aus b) und der Bestimmungsgleichung für den Druck aus a) können Sie nun die Kraft auf die Kugel nach

$$K_i = \int \mathrm{dF}(\mathrm{p}\mathrm{n_i} - \tau_{\mathrm{ik}}\mathrm{n_k}) \quad \text{mit } \boldsymbol{\tau} = 2\eta \ \mathrm{def}\boldsymbol{v} \quad \text{und } \ \boldsymbol{n} = -\frac{\boldsymbol{r}}{\mathrm{r}}$$

bestimmen, indem Sie über die Kugeloberfläche integrieren. Als Ergebnis erhält man die Stokessche Widerstandsformel für eine Kugel in einer zähen Flüssigkeit:

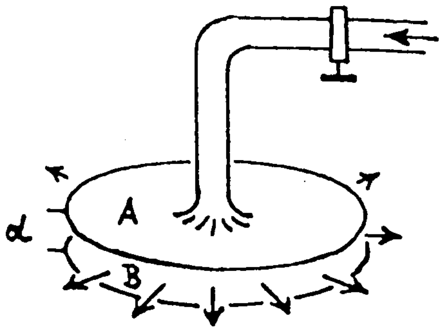
$$\boldsymbol{K} = -6\pi\eta R\boldsymbol{v}_0$$

Zwischenergebnis: Sie erhalten für die Kraft

$$\boldsymbol{K} = -\int \mathrm{dF} \left(\mathrm{p_0}\frac{\boldsymbol{r}}{\mathrm{r}} + \frac{3\eta}{2\mathrm{R}}\boldsymbol{v}_0 \right)$$

wobei p_0 ein konstanter Druck ist, der als Integrationskonstante in a) auftaucht.

Aufgabe 2 (Hausaufgabe): **(4 Punkte)**



Das skizzierte rotationssymmetrische Gerät zeigt folgendes Strömungsparadox: Wenn Gas durch die Anordnung strömt, erfährt die bewegliche Platte B eine auf die Platte A gerichtete Kraft. Schätzen Sie das Gewicht G ab, dem bei gegebenen Überdruck P im Vorratskessel des Gaswerks das Gleichgewicht gehalten werden kann.

a) Erklären Sie diesen Effekt zunächst qualitativ. Welcher bekannte Satz wird hier zweckmäßig angewendet? Skizzieren Sie — ebenfalls qualitativ — die Stromlinien. Gibt es Staupunkte? Wodurch sind diese ausgezeichnet?

b) Berechnen Sie die Strömung zwischen den Platten unter folgenden Annahmen:
Das reibungsfrei strömende Gas sei inkompressibel. Die Strömung sei eine ebene Potentialströmung, d. h. $\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\Phi$. Zwischen den Platten bilde sich eine Strömung aus, die in z-Richtung konstant ist. Äußern Sie sich kritisch zu diesen Vereinfachungen.
Welcher Gleichung genügt das Geschwindigkeitspotential Φ. Bei der Lösung tritt eine freie Integrationskonstante im resultierenden Geschwindigkeitsfeld auf, die man aus der Forderung bestimmt, dass am Rand der Platten A und B der Atmosphärendruck p_a herrscht.

c) Berechnen Sie den Gasdruck zwischen den Platten A und B. Er zeigt eine unangenehme Besonderheit, die Sie durch die Einführung eines Abschneideradius r_0 beseitigen können. Wie würden Sie r_0 wählen? Geben Sie obere und untere Grenzen für den Gasdruck im Scheibchen $0 \leq r \leq r_0$ an und begründen Sie diese physikalisch!

d) Ermitteln Sie nun eine obere und eine untere Schranke für das zulässige Gewicht G der Platte B, in denen zunächst r_0 steht. Bei einer möglichen Wahl von r_0 kommt in den Grenzen von G der Plattenabstand d explizit nicht vor. Anschaulich ist jedoch klar, dass G mit wachsendem Abstand d kleiner werden muss. Erklären Sie diese Tatsache, indem Sie eine alternative Abschätzung für r_0 verwenden, in die d eingeht.