Übungsblatt 10
Theoretische Physik V : Kontinuumsmechanik
WS 2009/10

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe): **(3 Punkte)**

Betrachten Sie die Hauptgleichung der linearen Elastizitätstheorie (s. Aufgabe 3) und zeigen Sie, dass bei einer konstanten Volumenkraftdichte jede Lösung $\mathbf{u}$ die biharmonische Gleichung $\Delta\Delta\boldsymbol{u} = 0$ erfüllt. Gilt auch der Umkehrschluss?
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\Delta\,\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$.

Aufgabe 2 (Votieraufgabe): **(3 Punkte)**

Leiten Sie die *Beltrami-Michell*-Gleichungen

$$\Delta\boldsymbol{\sigma} + \frac{2\lambda+2\mu}{3\lambda+2\mu}\nabla(\nabla\,\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{\sigma})^T + \rho(\nabla\boldsymbol{k}^T + (\nabla\boldsymbol{k}^T)^T) + \frac{\lambda\rho}{\lambda+2\mu}\nabla\cdot\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{I} = \mathbf{0}$$

aus den Kompatibilitätsbedingungen

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\epsilon})^T = \mathbf{0}$$

her. Setzen Sie dazu das *Hooke*sche Gesetz für $\boldsymbol{\epsilon}$ (isotroper Fall) ein und betrachten Sie den elastostatischen Fall für homogene, isotrope Medien.
Hinweis: Versuchen Sie Indexschreibweise zu vermeiden und verwenden Sie statt dessen Eigenschaften des Cauchyschen-Spannungstensors.

Aufgabe 3 (Hausaufgabe): **(5 Punkte)**

Bestimmen Sie die Deformation einer elastischen Vollkugel mit Radius R unter der Wirkung des eigenen Gravitationsfeldes.

a) Leiten Sie die Hauptgleichung der linearen Elastostatik für ein isotropes Material her:

$$(\mu + \lambda)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} + \mu\Delta\,\boldsymbol{u} + \boldsymbol{k} = 0,$$

wobei $\boldsymbol{u}$ das Verschiebungsfeld und $\boldsymbol{k}$ die Volumenkraftdichte ist.
Gehen Sie von $\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{k} = 0$ aus (Impulsbilanz mit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$) und verwenden Sie das Spannungs-Dehnungs-Gesetz für ein isotropes Material.

b) Stellen Sie nun die Hauptgleichung der Elastostatik für die elastische Vollkugel in Kugelkoordinaten auf. Überlegen Sie sich zunächst, welche Komponenten des Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{u}$ im vorliegenden Problem vorkommen und von welchen Koordinaten sie abhängen.
Hinweise: Berechnen Sie den Laplaceoperator mit Hilfe der Beziehung: $\Delta = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}$. Verwenden Sie Folgerungen aus der geometrischen Linearisierung.

c) Berechnen Sie das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{u}$ unter den Randbedingungen, dass die Verschiebungen im Kugelzentrum endlich sind, und dass die Komponente σ_{rr} des Spannungstensors an der Oberfläche verschwindet. Formulieren Sie dazu die Spannungs-Dehnungs-Beziehung in Kugelkoordinaten. Wie groß ist der Druck im Kugelzentrum?

d) Tragen Sie den Verlauf der Radialkomponente der Verschiebung u_r über r auf. An welchen Stellen im Innern der Kugel ist die Verschiebung Null? Wo liegt ein Extremum? Ist es sinnvoll, dass u_r positiv wird? Warum spielt hier ein positives u_r keine Rolle? Ermitteln Sie dazu mit Hilfe der Stabilitätsbedingungen für λ und μ: $\mu > 0$ und $2\mu + 3\lambda > 0$, eine untere Grenze für die Lage der Nullstelle von u_r.