Übungsblatt 5
Kontinuumstheorie
WS 2012/13

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe): **(4 Punkte)**

In der Aufgabe 2 auf Übungsblatt 4 haben Sie für ein zweidimensionales Spannungsfeld den Mohrschen Spannungskreis berechnet, der bei gegebenem Spannungstensor eine eindeutige Beziehung zwischen Normal- und Schubspannung herstellt. Im dreidimensionalen Fall existiert diese eindeutige Beziehung nicht mehr. Jedoch gibt es drei Mohrsche Spannungskreise, die die Normal- und Schubspannungen auf ein bestimmtes Gebiet eingrenzen. Das Gebiet soll hier ermittelt werden. Dazu sei ein dreidimensionales Spannungsfeld gegeben, für dessen Hauptspannungen $\sigma_i,\ i = 1, 2, 3$ die Beziehung $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ gelte.

a) Berechnen Sie die Normalspannung t_n sowie den Ausdruck $t_n^2 + t_s^2$ (t_s...Schubspannung) in Abhängigkeit der Hauptspannungen σ_i und der Komponenten n_i des Flächenvektors. Arbeiten Sie dazu im Eigensystem des Spannungstensors. (1 Punkt).

b) Leiten Sie aus den Beziehungen in a) mit Hilfe der Normierungsbedingung für den Flächenvektor, $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, drei Gleichungen ab (z. B.: $n_1^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) = t_s^2 + (t_n - \sigma_2)(t_n - \sigma_3)$). Mit Hilfe von $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ folgen daraus drei Ungleichungen, die das gesuchte Gebiet im $t_n - t_s$ Diagramm beschreiben. Was sind die Mohrschen Spannungkreise? (2 Punkte).

c) Wodurch ist die maximale Schubspannung gegeben? (1 Punkte).

Aufgabe 2 (Votieraufgabe): **(4 Punkte)**

In der Vorlesung haben Sie die Drehimpulsbilanz in *räumlicher* Formulierung kennengelernt. Dabei ergab sich die Symmetrie des *Cauchy*schen Spannungtensors $T = T^T$.

Leiten Sie analog zur Vorlesung die Drehimpulsbilanz in *materieller* Formulierung her. Folgern Sie daraus die Symmetrieaussagen für den ersten und den zweiten *Piola-Kirchhoff*schen Spannungstensor (${}^{I}P$ und ${}^{II}P$):

$$ {}^{I}P \cdot F^T = F \cdot {}^{I}P^T $$
$$ {}^{II}P = {}^{II}P^T $$

Aufgabe 3 (Hausaufgabe): (4 Punkte)

Für einen Spannungstensor T im Punkt P seien die Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und die dazugehörigen Hauptrichtungen $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ bekannt. Man berechne die maximale Schubspannung und die zugeordnete Richtung.

Aufgabe 4 (Hausaufgabe): (6 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie das Reynoldsche Transporttheorem

$$ \frac{\mathrm{D}\Psi}{\mathrm{Dt}} = \int_B \left(\frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{Dt}} + \Phi \mathrm{div}\, \mathbf{v} \right) \mathrm{dV} \qquad \text{mit } \Psi = \int_{\mathrm{B}} \Phi \, \mathrm{dV} $$

kennengelernt und mit seiner Hilfe aus der Massenerhaltung die Kontinuitätsgleichung der Massendichte abgeleitet. Analog lassen sich mit seiner Hilfe auch die Kontinuitätsgleichungen für weitere dichteartige Größen herleiten.

a) Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen ohne Materie die Kontinuitätsgleichung der Ladungsdichte her.
Benutzen Sie nun das Reynoldsche Transporttheorem für eine alternative Herleitung, indem Sie von der Ladungserhaltung ausgehen. (2 Punkte).

b) Die Energiedichte des freien elektromagnetischen Feldes lautet in SI-Einheiten $\mathrm{u} = \frac{\epsilon_0}{2}\mathrm{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{B}^2$.
Wie lauten die dazugehörigen Bilanzgleichungen, die Sie mit Hilfe der homogenen Maxwell-Gleichungen bzw. mit dem Reynoldschen Transporttheorem gewinnen? Zeigen Sie die Äquivalenz beider Gleichungen, indem Sie explizit ebene elektromagnetische Wellen annehmen. (2 Punkte).

c) Wie lautet die Kontinuitätsgleichung der Quantenmechanik und welche Erhaltungsgröße spielt hierbei eine Rolle? (1 Punkt).

d) Wie sieht die lokale Bilanzgleichung für die Impulsdichte $\mathbf{p} = \rho\mathbf{v}$ aus? Interpretieren Sie die dabei auftretenden Terme. (1 Punkt).