Herleitung des parabolischen Halley-Verfahrens

Matthias Feldmaier

20. Juni 2012

Ausgangspunkt: Taylorentwicklung

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f''(x)}{2} \cdot h^2 + \mathcal{O}(h^3)$$

Die Nullstelle dieser Gleichung erhält man durch Lösen der quadratischen Gleichung in h:

$$\begin{aligned} f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{f''(x)}{2} \cdot h^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{2} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{h^2} + \frac{f'(x)}{f(x)} \frac{1}{h} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Formel wird durch quadratisches Ergänzen auf folgende Form gebracht:

$$f(x) \cdot \left(\frac{1}{h} + \frac{f'(x)}{2f(x)} \right)^2 = \frac{f'(x)^2}{4f(x)} - \frac{f''(x)}{2} \cdot \frac{2f(x)}{2f(x)}$$

Durch Wurzelziehen und Umformen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{1}{h} &= -\left(\frac{f'(x) \pm \sqrt{f'(x)^2 - 2f''(x)f(x)}}{2f(x)} \right) \\ \Leftrightarrow h &= \frac{-2f(x)}{f'(x) \pm \sqrt{f'(x)^2 - 2f(x)f''(x)}} \end{aligned}$$

Zur entsprechenden Iteration gelangt man dann über $h = x_{n+1} - x_n$ ($x \mathrel{\widehat{=}} x_n$), wobei man für $\pm$ mittels eines $\operatorname{sign}(f'(x))$ das entsprechende Vorzeichen wählt, um den Nenner zu maximieren (sorgt für numerische Stabilität). Es ergibt sich also die Formel für das *parabolische Halley-Verfahren*:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + \operatorname{sign}(f'(x_n))\sqrt{f'(x_n)^2 - 2f(x_n)f''(x_n)}}$$