

**Übungsblatt 11**  
**Theoretische Physik III: Elektrodynamik**  
**SS 2014**

Fakultät Mathematik und Physik, Universität Stuttgart  
Prof. Dr. Dr. R. Hilfer  
A. Lemmer ([andreas.lemmer@icp.uni-stuttgart.de](mailto:andreas.lemmer@icp.uni-stuttgart.de))

---

**Aufgabe 1 (Votieraufgabe)**

**4 Punkte**

Wenn keine Ladungen oder Ströme vorhanden sind, erfüllen das skalare Potential  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  und das Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  in der Lorentz-Eichung die homogene Wellengleichung im Vakuum:

$$\begin{aligned}\square\varphi(\mathbf{r}, t) &= 0 \quad , \\ \square\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{0} \quad ,\end{aligned}$$

wobei  $\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  der d'Alembert-Operator ist.

1. Zeigen Sie, dass die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  und die magnetische Flussdichte  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  die gleiche Differentialgleichung erfüllen.
2. Die Felder

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad , \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)\end{aligned}$$

lösen die Wellengleichung. Wie lautet der Zusammenhang zwischen  $\omega$  und  $\mathbf{k}$ ? Untersuchen Sie die Positionen und Orientierungen der Vektoren  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}_0$  und  $\mathbf{B}_0$  zueinander.

3. Wie groß sind die Energieflussdichten parallel und orthogonal zu  $\mathbf{k}$ ?
4. Wie groß ist die Feldenergiedichte?

## Aufgabe 2 (Votieraufgabe)

4 Punkte

Zeigen Sie, dass  $D(\mathbf{r}, t)$  definiert als

$$D(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2i(2\pi)^3} \int \frac{1}{uk} (e^{ikut} - e^{-ikut}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3k$$

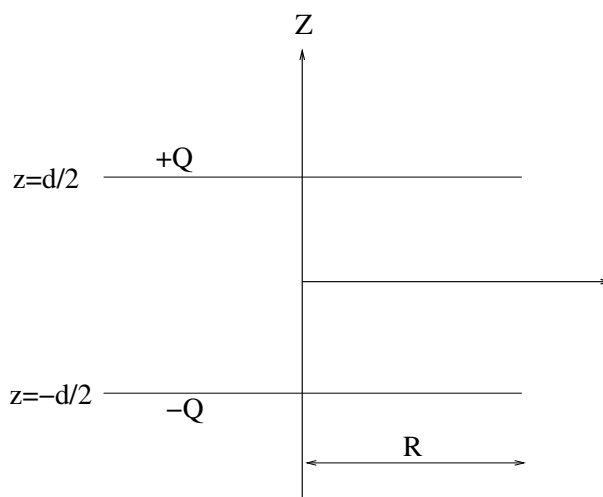
gegeben ist durch

$$D(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi ur} \begin{cases} \delta(r - ut) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t = 0 \\ -\delta(r + ut) & , \quad t < 0 \end{cases}$$

mit  $r = |\mathbf{r}|$  und  $k = |\mathbf{k}|$ .

## Aufgabe 3 (Hausaufgabe)

4 Punkte



Man betrachte zwei kreisförmige Metallplatten mit Radius  $R$  und vernachlässigbarer Dicke. Sie seien parallel zueinander mit Abstand  $d$  und senkrecht zur  $z$ -Achse angeordnet (siehe Schaubild). Die Raum zwischen den Platten sei mit einem Dielektrikum gefüllt, dessen elektrische Permittivität  $\epsilon_r(\mathbf{r})$  durch

$$\epsilon_r(\mathbf{r}) = \epsilon_r(z) = \epsilon_1 + \frac{1}{2}(\epsilon_2 - \epsilon_1) \left(1 + 2\frac{z}{d}\right)$$

gegeben sei.

Die obere Platte sei mit der Ladung  $+Q$  und die untere mit der Ladung  $-Q$  geladen. Benutzen Sie den Maxwell'schen Spannungstensor, um die elektrostatischen Kräfte ( $\mathbf{E} = E(z)\mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ) zu berechnen, die auf beide Platten wirken, wenn  $R \gg d$  ist.

#### Aufgabe 4 (Hausaufgabe)

5 Punkte

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung eines Punktteilchens mit Masse  $m$  und Ladung  $q$  unter dem Einfluss der von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  erzeugten Lorentzkraft auf und bestimmen Sie die zeitliche Änderung der Teilchenenergie in diesem äußeren Feld.

b) Eine elektromagnetische Welle werde durch das Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E (\cos(kz - \omega t), \sin(kz - \omega t), 0)$$

beschrieben. Berechnen Sie die zugehörige magnetische Induktion  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  in einem linearen, homogenen, isotropen und ungeladenen Isolator.

c) Das Teilchen aus a) bewege sich im Feld aus b). Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

d) Das Teilchen befinde sich zur Zeit  $t = 0$  am Koordinatenursprung. Wie müssen die Anfangsbedingungen für die Geschwindigkeit gewählt werden, damit die Energie  $W$  des Teilchens konstant bleibt?

e) Geben Sie den Impuls  $\mathbf{p}$  des Teilchens an und verifizieren Sie, dass die Richtung von  $\mathbf{p}_\perp = (p_x, p_y, 0)$  zu jedem Zeitpunkt mit der Richtung von  $\mathbf{B}$  übereinstimmt.

f) Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen aus d).

g) Welche Bahn beschreibt das Teilchen in der  $xy$ -Ebene?