

# Übungsblatt 6

## Relativitätstheorie II

Sommersemester 2018

Fakultät für Physik, Universität Stuttgart

Prof. Dr. R. Hilfer

*Vorbemerkung:* **Alle** Teilaufgaben der einzigen Aufgabe dieses Übungsblatts können unter Verwendung der angegebenen Zwischenergebnisse unabhängig voneinander bearbeitet werden.

### Aufgabe

8 × 2 Punkte

Betrachten Sie einen Lichtstrahl der von der Erde zur Venus gesendet und zurückreflektiert wird. Bei einer nicht-relativistischen Betrachtung kann die Zeit die zwischen Aussendung und Rückkehr des Lichtstrahls durch

$$t_{\text{kla}} = \frac{2}{c} \left( \sqrt{r_{\text{E}}^2 - r_0^2} + \sqrt{r_{\text{V}}^2 - r_0^2} \right) \quad (1)$$

ausgedrückt werden. Hier ist  $r_{\text{E}}$  der Abstand zwischen Sonne und Erde,  $r_{\text{V}}$  der Abstand zwischen Sonne und Venus, und  $r_0$  ist der Abstand des Lichtstrahls von der Sonne (stets bezogen auf die Schwerpunkte).

In dieser Aufgabe wird der relativistische Fall betrachtet, wobei das Gravitationsfeld der Sonne durch die Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_{\text{s}}}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_{\text{s}}}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2)$$

modelliert wird ( $t \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\phi \in (0, 2\pi)$ ). Es soll gezeigt werden, dass sich für kleine Schwarzschildradien  $r_{\text{s}}$  in erster Ordnung die Rückkehrzeit

$$t_{\text{rel}} = \frac{2}{c} \left( \sqrt{r_{\text{E}}^2 - r_0^2} + \sqrt{r_{\text{V}}^2 - r_0^2} \right) \quad (3a)$$

$$+ \frac{2r_{\text{s}}}{c} \log \left[ \frac{(r_{\text{E}} + \sqrt{r_{\text{E}}^2 - r_0^2})(r_{\text{V}} + \sqrt{r_{\text{V}}^2 - r_0^2})}{r_0^2} \right] \quad (3b)$$

$$+ \frac{r_{\text{s}}}{c} \left( \sqrt{\frac{r_{\text{E}} - r_0}{r_{\text{E}} + r_0}} + \sqrt{\frac{r_{\text{V}} - r_0}{r_{\text{V}} + r_0}} \right) \quad (3c)$$

ergibt (Stichwort: “Shapiro-Verzögerung”). Hier sind die Größen  $r_{\text{E}}$ ,  $r_{\text{V}}$  und  $r_0$  als Radien  $r$  im Sinne der Schwarzschildkoordinaten  $(t, r, \theta, \phi)$  zu interpretieren. Die Gravitation von Erde und Venus und deren Bewegung werden vernachlässigt.

1. Zeigen Sie Gleichung (1).

2. Folgern Sie aus (2), dass die Trajektorie eines Lichtstrahls der in der Ebene  $\theta = \pi/2$  verläuft die Differentialgleichung

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)} - r^2 \dot{\phi}^2 = 0 \quad (4)$$

erfüllt, wobei der Punkt die Ableitung nach dem Parameter der Trajektorie notiert. (In dieser Gleichung und im Folgenden sind  $t, r, \phi$  Funktionen dieses Parameters.)

Nehmen Sie an, dass die Parametrisierung so gewählt ist, dass

$$A := \dot{t} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right), \quad B := r^2 \dot{\phi} \quad (5)$$

Erhaltungsgrößen sind, also Konstanten. (Dass dies möglich ist, folgt aus einer Variante des Noetherschen Theorems.)

3. Zeigen Sie, dass man aus (4), (5) und der Definition von  $r_0$  folgendes erhält:

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{r_0^2 c^2}{1 - r_s/r_0}. \quad (6)$$

4. Leiten Sie aus (4), (5) und (6) die folgende Formel her

$$\frac{\dot{r}}{\dot{t}} = c \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{1 - r_s/r}{1 - r_s/r_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}. \quad (7)$$

5. Erklären Sie, warum aus (7) folgt, dass die Zeit bis zur Rückkehr des Lichtstrahls durch den Ausdruck

$$t_{\text{rel}} = \frac{2}{c} [F(r_E) + F(r_V)] \quad (8a)$$

gegeben ist, wobei  $F(r_1)$  für  $r_1 > r_0$  durch den folgenden Integralausdruck definiert ist

$$F(r_1) := \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\left(1 - r_s/r\right) \sqrt{1 - \frac{1 - r_s/r}{1 - r_s/r_0} (r_0/r)^2}}. \quad (8b)$$

6. Berechnen Sie, dass

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1-x/a}{1-x/b} \left(\frac{b}{a}\right)^2}} \Bigg|_{x=0} = \frac{b}{2(a+b)\sqrt{a^2 - b^2}} \quad \text{für } a > b > 0, \quad (9a)$$

$$\int_a^x \frac{dy}{(y+a)\sqrt{y^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} \quad \text{für } x > a > 0. \quad (9b)$$

7. Zeigen Sie, dass man die Formel (3) aus (8) erhält, wenn man den Integranden in (8b) bis zur ersten Ordnung in  $r_s \ll 1$  entwickelt. Sie dürfen die Gleichungen (9) verwenden.
8. Diskutieren Sie, inwiefern die Größen die in den Formeln (1) und (3) auftauchen experimentell zugänglich sind.