Übungsblatt 6

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I

Klassische Feldtheorie

WS 2016/17

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe): (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für ein ruhendes Medium die Gleichgewichtsbedingung

$$\varrho \boldsymbol{k} + \operatorname{div} \boldsymbol{T} = 0$$

aus der Impulsbilanz folgt, wobei $\boldsymbol{k}$ die Massenkraftdichte und $\boldsymbol{T}$ den Spannungstensor darstellt. Zeigen Sie, dass für ein isotropes Medium

$$\boldsymbol{T} = -p\boldsymbol{I}$$

gilt. (1 Punkt).

b) Leiten Sie aus der Bedingung in a) die barometrische Höhenformel

$$p = p_0 \exp(-\varrho_0 g z / p_0)$$

ab.
Hinweis: p und ϱ sind Druck bzw. Dichte der Luft, g ist die Erdbeschleunigung und wird als konstant angesetzt und z ist die Höhe über der Erdoberfläche. Betrachten Sie die Atmosphäre als isothermes, ideales Gas, so dass die Beziehung $p/p_0 = \varrho/\varrho_0$ gilt. (2 Punkte).

c) Bestimmen Sie den Druckverlauf für den Fall, dass die Luft der Polytropengleichung $\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho^n}{\varrho_0^n}$ genügt. (1 Punkt).

Aufgabe 2 (Votieraufgabe): (3 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Energiebilanz in *räumlicher* Formulierung kennengelernt. Leiten Sie analog zur Vorlesung die Energiebilanz in *materieller* Formulierung her.

Aufgabe 3 (Hausaufgabe): (3 Punkte)

Wir betrachten ein Gebiet $G = G_1 + G_2$, in dem mit Ausnahme einer Unstetigkeitsfläche U alle den Zustand eines Kontinuums bestimmenden—von x, y, z und t abhängenden—Funktionen stetig differenzierbar sind und ihre rechts- und linksseitigen Grenzwerte bei Annäherung an U existieren. Es bedeuten $\boldsymbol{u}$ die Geschwindigkeit von U und $\boldsymbol{N}$ den zugehörigen Normaleneinheitsvektor, der in das Gebiet G_2 weisen möge. Läßt man eine Orts- und Zeitveränderlichkeit von G und seiner Berandung ∂G zu, so nimmt die Kontinuitätsgleichung die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_G \varrho \,\mathrm{d}V = 0$$

an.

Betrachtet man eine Funktion $\psi = \psi(x, y, z; t)$ und vollzieht man für diese Funktion den Grenzübergang zur Unstetigkeitsfläche U, so ergibt sich

$$\lim_{G\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_G \psi \,\mathrm{d}V = \int_U [\psi_1 \, (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_1) \cdot \boldsymbol{N} - \psi_2 \, (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_2) \cdot \boldsymbol{N}] \,\mathrm{d}F. \tag{1}$$

(Zur Herleitung siehe unten.) Die Größen ψ_1 und ψ_2 stellen den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von ψ an U dar und $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von $\boldsymbol{v}$ an U. $\boldsymbol{v}$ ist die Geschwindigkeit der Materie relativ zu ∂G, die von $\boldsymbol{u}$ als Geschwindigkeit von U in G zu unterscheiden ist, welche zur Lageveränderung von G_1 und G_2 in G führt.

a) Zu welchem Ergebnis führt die Anwendung der Formel (1) auf die Kontinuitätsgleichung? Interpretieren Sie physikalisch.

b) Schreiben Sie die Entropieungleichung (2. Hauptsatz der Thermodynamik) für das Gebiet G in integraler Form. Wenden Sie die Formel (1) darauf an und beachten Sie das Ergebnis des Aufgabenteils a).

c) Was ergibt sich aus b), wenn Sie als Material ein ideales Gas verwenden? Interpretieren Sie das Ergebnis.

Herleitung der Formel (1)

Zerlegung des Integrals in eine Summe über G_1 und G_2:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_G \psi \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{G_1}\psi \mathrm{d}V + \int_{G_2}\psi \mathrm{d}V\right). \tag{2}$$

Wir betrachten das Integral über G_1. Die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ beschreibt die zeitliche Änderung des Volumenintegrals durch die Änderung von ψ einerseits und die Änderung des Integrationsgebietes andererseits. Da innerhalb von G_1 keine weiteren Unstetigkeiten vorhanden sind, heben sich dort die Nettoflüsse durch die Volumenelemente auf. Die einzigen Beiträge zum zweiten Term sind also die Flüsse durch die Oberflächen von G_1:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{G_1}\psi \, \mathrm{d}V = \int_{G_1}\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \sum_i \int_{\text{Flächen}\, i} \psi_i \, \boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{n}_i \, \mathrm{d}F, \tag{3}$$

wobei ψ_i der Grenzwert von ψ an und $\boldsymbol{n}_i$ die Normalen auf die Oberflächen sind. $\boldsymbol{w}_i$ ist die Geschwindigkeit der Fläche i. Damit ist $\boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{n}_i$ die Flusrate durch die Fläche i.

Das Gebiet G_1 ist durch die materielle Fläche F_1 und die Unstetigkeitsfläche U berandet. Die Summe in (3) lautet dann

$$\sum_i \int_{\text{Flächen}\, i} \psi_i \, \boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{n}_i \, \mathrm{d}F = \int_{F_1} \psi \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}F + \int_U \psi_1 \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{N} \, \mathrm{d}F. \tag{4}$$

Dabei besitzen die Größen $\boldsymbol{v}_i$ und ψ_i auf der materiellen Fläche F_1 die Werte $\boldsymbol{v}$ und ψ.

Wir wollen nun den ersten Term auf der rechten Seite von (4) als Volumenintegral über das Gebiet G_1 schreiben. (Wenn ψ die Massendichte darstellt, so ergeben sich dann die Kontinuitätsgleichung und zusätzlich die Terme von der Unstetigkeitsfläche.) Dazu schreiben wir ihn als

$$\int_{F_1} \psi \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}F = \int_{F_1+U-U} \psi \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}F = \int_{\partial G_1} \psi \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}F + \int_{-U} \psi_1 \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{N} \, \mathrm{d}F \tag{5}$$

mit $\partial G_1 = F_1 + U$. Dabei ist das Integral über $-U$ gleich dem Integral über U mit negativ orientiertem $\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}F$.

Zusammenfassend erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{G_1}\psi \, \mathrm{d}V = \int_{G_1}\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_{\partial G_1} \psi \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}F + \int_U \psi_1 \, (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_1) \cdot \boldsymbol{N} \, \mathrm{d}F. \tag{6}$$

Verwendet man für das Integral über die Fläche ∂G den Gaußschen Satz, der besagt, daš ein Oberflächenintegral über ein stetiges Vektorfeld gleich dem entsprechenden Volumenintegral über die Divergenz des Vektorfeldes ist, so ergibt sich aus (5) schließlich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{G_1}\psi \, \mathrm{d}V = \int_{G_1}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla(\psi \boldsymbol{v})\right]\mathrm{d}V + \int_U \psi_1 \, (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_1) \cdot \boldsymbol{N} \, \mathrm{d}F. \tag{7}$$

Eine analoge Beziehung erhält man für das Gebiet G_2, so daß aus (2) letztendlich

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_G \psi \, \mathrm{d}V \quad = \quad & \int_{G_1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla(\psi \boldsymbol{v}) \right] \mathrm{d}V + \int_{G_2} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla(\psi \boldsymbol{v}) \right] \mathrm{d}V \\ & - \int_U \psi_1 \, (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_1) \cdot \boldsymbol{N} \, \mathrm{d}F + \int_U \psi_2 \, (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_2) \cdot \boldsymbol{N} \, \mathrm{d}F \end{aligned} \tag{8}$$

hervorgeht. Vollzieht man die beiden Grenzprozesse

$$G_1 \to 0, \qquad G_2 \to 0$$

so, daß sich das Gebiet G auf die Unstetigkeitsfläche U zusammenzieht, dann ergibt sich aus (8) die Formel (1).