Übungsblatt 13

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I+II

Klassische Feldtheorie

WS 2013/14

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe): **(4 Punkte)**

Berechnen Sie das Oberflächenprofil einer rotierenden idealen Flüssigkeit (Dichte $\rho = \text{const.}$) in einem zylindrischen unendlich hohen Gefäß(Radius R, Winkelgeschwindigkeit ω, Drehachse $||\ \boldsymbol{e}_z$). Das Schwerefeld der Erde sei gegeben durch die Kraftdichte $f_z = -g\rho$ (g: Erdbeschleunigung).

a) Zeigen Sie, dass in Lagrange-Koordinaten $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\xi}, t)$

$$\frac{D}{Dt} v_x = -\omega^2 x \qquad\qquad \frac{D}{Dt} v_y = -\omega^2 y$$

gilt und stellen Sie damit die Euler-Gleichung (in Lagrange-Koord.) auf.

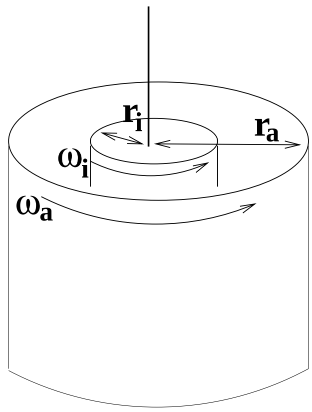
b) Lösen Sie diese Gleichung durch Integration bzgl. $p(x, y, z)$.

c) Die freie Oberfläche ist gekennzeichnet durch $p = \text{const.}$
Bestimmen Sie dadurch $z(x, y)$.

d) Für $\omega = 0$ sei die Flüssigkeitshöhe h_0. Ab welchem ω verliert das Ergebnis c) seine Gültigkeit?

Aufgabe 2 (Hausaufgabe): **(4 Punkte)**

Im Raum zwischen zwei konzentrischen, um die gemeinsame Achse rotierenden Zylindern (vgl. nebenstehendes Bild) entwickeln Newtonsche Flüssigkeiten das Geschwindigkeitsfeld der Couette-Strömung



$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = v(r)\boldsymbol{e}_\phi = (\alpha r + \frac{\beta}{r}) \begin{pmatrix} -\sin\,\phi \\ \cos\,\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

($r^2 = x^2 + y^2$ und $\phi = \arctan\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$)

a) Geben Sie α und β in Abhängigkeit der geometrischen und kinematischen Parameter r_i, r_a, ω_i und ω_a an. Betrachten Sie den Grenzfall ($r_a \to \infty, \omega_a \to 0$).

b) Bestimmen Sie die Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\boldsymbol{v}/2$ und die Wirbellinien von $v(x)$. Welche Bewegung der lokalen Volumenelemente wird durch die beiden Beiträge zum Geschwindigkeitsfeld beschrieben?

c) Berechnen Sie die Zirkulation $\Gamma = \oint \boldsymbol{v}\mathrm{d}s$ des Geschwindigkeitsfeldes.

d) Betrachten Sie einen Kreis mit Radius r_0 um den Ursprung. Ist der Stokessche Satz auf diesem Gebiet erfüllt? Diskutieren Sie das Ergebnis.