

Übungsblatt 7

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie II Klassische Feldtheorie SS 2017

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe):

(8 Punkte)

Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$c_v \rho \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \lambda \Delta T(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

auf ganz \mathbb{R}^d .

- Geben Sie, analog zu Gleichung (VI.4.21) der Vorlesung, eine Integraldarstellung der Lösung der Wärmeleitungsgleichung (1) mit Anfangsbedingung $T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x})$ an.
- Zeigen Sie, dass die in a) gefundene Integraldarstellung die Wärmeleitungsgleichung (1) für eine beschränkte Funktion $T_0(\mathbf{x})$ löst.
- Berechnen Sie die Lösung der Wärmeleitungsgleichung (1) für einen unendlich langen Draht ($d = 1$) mit der Anfangsbedingung

$$T_0(x) = \begin{cases} b_1 & , -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ b_2 & , \text{sonst} \end{cases} \quad (2)$$

- Für einen Eisendraht ist $\lambda = 80 \text{ W}/(\text{mK})$, $c_v = 450 \text{ J}/(\text{kgK})$ und $\rho = 7870 \text{ kg}/\text{m}^3$. Die Parameter der Anfangsbedingung (2) werden spezifiziert mit $b_1 = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$, $b_2 = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ und $L = 2 \text{ m}$.
Zu welchem Zeitpunkt t ist die Temperatur T an dem Ort $x = 0 \text{ m}$ zum ersten Mal kleiner als $T = 500 \text{ }^\circ\text{C}$?
Wie hängt dieser Zeitpunkt t von dem Temperaturunterschied $\Delta b = b_1 - b_2$ ab?

Aufgabe 2 (Votieraufgabe):**(2 Punkte)**

Aus der Ladungserhaltung folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Im Folgenden wird der stationäre Fall angenommen ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$).

- a) Zeigen Sie, daß im stationären Fall durch jeden Querschnitt derselbe Strom fließt. Zerteilen Sie hierfür exemplarisch die Oberfläche $S(V)$ eines Volumens V , durch die ein Strom fließt, in zwei Teile. (1 Punkt).
- b) Vier Leiter seien durch einen Knoten, der sich in einem Gebiet mit dem Volumen V befindet, verbunden. Zwei Leiter sollen einen Strom (I_1 bzw. I_2) in das Gebiet hineinragen und zwei Leiter sollen einen Strom (I_3 bzw. I_4) hinaustragen. Zeigen Sie, daß am Leiterknoten die Summe der zufließenden gleich der Summe der abfließenden Ströme ist (*Kirchhoffsche* Knotenregel). (1 Punkt).

Aufgabe 3 (Hausaufgabe):**(8 Punkte)**

Betrachten Sie ein System von geladenen Teilchen, auf die nur die Lorentzkraft des elektromagnetischen Feldes wirken soll.

- a) Begründen Sie die mechanische Impulsbilanz für den Gesamtimpuls $\mathbf{p}_V^{(mech)}$:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_V^{(mech)} = \int d^3r \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \int_V d^3r (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}).$$

(1 Punkt).

- b) Eliminieren Sie ρ und \mathbf{j} durch die inhomogenen Maxwell-Gleichungen. Bringen Sie die Terme auf die Form

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{B} - \frac{d}{dt} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

Hinweis: Homogene Maxwell-Gleichungen:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{3}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \tag{4}$$

Inhomogene Maxwell-Gleichungen:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{j} \quad (6)$$

Materialgleichungen (lineares Medium):

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \quad (7)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (8)$$

(2 Punkte).

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Impulses des elektromagnetischen Feldes

$$\mathbf{p}_V^{(Feld)} = \int_V d^3r (\mathbf{D} \times \mathbf{B})$$

die Gesamtimpulsbilanz $\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_V^{(mech)} + \mathbf{p}_V^{(Feld)})$. Sie ist symmetrisch in magnetischen und elektrischen Größen. (1 Punkt).

d) Zeigen Sie, dass für ein lineares, homogenes Medium gilt:

$$(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E})_i = \epsilon_r \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (E_i E_j - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ij})$$

und analog:

$$(\mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H})_i = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij}).$$

(1 Punkt).

e) Mit Hilfe des Maxwell'schen Spannungstensors \mathbf{T} kann die Impulsbilanz wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_V^{(mech)} + \mathbf{p}_V^{(Feld)}) = \int_V d^3r \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}.$$

Geben Sie T_{ij} an. (1 Punkt).

f) Formen Sie das Ergebnis aus e) mit Hilfe des Gauß'schen Satzes um. Interpretieren Sie das Ergebnis. (1 Punkt).

g) Berechnen Sie die Kraft zwischen den Platten eines Kondensators ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$, $\mathbf{E} = (0, 0, -E)$). (1 Punkt).