

Übungsblatt 9

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I+II

Klassische Feldtheorie

WS 2013/14

Fakultät Mathematik und Physik

Universität Stuttgart

Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe):

(3 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass bei einem kubischen Material von den 21 Komponenten des elastischen Tensors nur drei linear unabhängig sind. Gehen Sie dabei von einem Koordinatensystem aus, bei dem x -, y - und z -Achse entlang der 4-zähligen Richtungen zeigen, und wählen Sie geeignete Symmetrieoperationen \mathbf{R} aus, um mittels $E_{ijkl} = E_{i'j'k'l'} R_{i'i} R_{j'j} R_{k'k} R_{l'l}$ zu zeigen, dass gewisse Komponenten gleich sind bzw. verschwinden.
- b) Wie lauten die Stabilitätsbedingungen für die drei elastischen Konstanten aus a)?

Aufgabe 2 (Votieraufgabe):

(5 Punkte)

Bestimmen Sie die Deformation einer elastischen Vollkugel mit Radius R unter der Wirkung des eigenen Gravitationsfeldes.

- a) Leiten Sie die Hauptgleichung der linearen Elastostatik für ein isotropes Material her:

$$(\mu + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{k} = 0,$$

wobei \mathbf{u} das Verschiebungsfeld und \mathbf{k} die Volumenkraftdichte ist.

Gehen Sie von $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{k} = 0$ aus (Impulsbilanz mit $\mathbf{v} = \mathbf{0}$) und verwenden Sie das Spannungs-Dehnungs-Gesetz für ein isotropes Material.

- b) Stellen Sie nun die Hauptgleichung der Elastostatik für die elastische Vollkugel in Kugelkoordinaten auf. Überlegen Sie sich zunächst, welche Komponenten des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} im vorliegenden Problem vorkommen und von welchen Koordinaten sie abhängen.
Hinweise: Berechnen Sie den Laplaceoperator mit Hilfe der Beziehung: $\Delta = \text{grad div} - \text{rot rot}$. Verwenden Sie Folgerungen aus der geometrischen Linearisierung.
- c) Berechnen Sie das Verschiebungsfeld \mathbf{u} unter den Randbedingungen, dass die Verschiebungen im Kugelzentrum endlich sind, und dass die Komponente σ_{rr} des Spannungstensors an der Oberfläche verschwindet. Formulieren Sie dazu die Spannungs-Dehnungs-Beziehung in Kugelkoordinaten. Wie groß ist der Druck im Kugelzentrum?
- d) Tragen Sie den Verlauf der Radialkomponente der Verschiebung u_r über r auf. An welchen Stellen im Innern der Kugel ist die Verschiebung Null? Wo liegt ein Extremum? Ist es sinnvoll, dass u_r positiv wird? Warum spielt hier ein positives u_r keine Rolle? Ermitteln Sie dazu mit Hilfe der Stabilitätsbedingungen für λ und μ : $\mu > 0$ und $2\mu + 3\lambda > 0$, eine untere Grenze für die Lage der Nullstelle von u_r .

Aufgabe 3 (Hausaufgabe):

(3 Punkte)

Leiten Sie die *Beltrami-Michell*-Gleichungen

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{2\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} \nabla (\nabla \text{Tr } \boldsymbol{\sigma})^T + \rho (\nabla \mathbf{k}^T + (\nabla \mathbf{k}^T)^T) + \frac{\lambda \rho}{\lambda + 2\mu} \nabla \cdot \mathbf{k} \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

aus den Kompatibilitätsbedingungen

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\epsilon})^T = \mathbf{0}$$

her. Setzen Sie dazu das *Hookesche* Gesetz für $\boldsymbol{\epsilon}$ (isotroper Fall) ein und betrachten Sie den elastostatischen Fall für homogene, isotrope Medien.

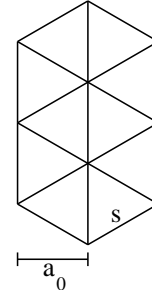
Hinweis: Versuchen Sie Indexschreibweise zu vermeiden und verwenden Sie statt dessen Eigenschaften des Cauchyschen-Spannungstensors.

Aufgabe 4 (Hausaufgabe):**(4 Punkte)**

Ein ebenes hexagonales Gitter lässt sich in linearer Näherung durch zwei elastische Konstanten beschreiben:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda\text{Sp}\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{1}.$$

Ziel dieser Aufgabe ist die Berechnung der elastischen Konstanten λ und μ aus einem einfachen mikroskopischen Modell.



- a) Die interatomare Wechselwirkung wird als Lennard-Jones-Potential

$$V(r) = V_0 \left(\left(\frac{s}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{s}{r} \right)^6 \right)$$

zwischen benachbarten Gitterplätzen angenommen. Entwickeln Sie die Wechselwirkungsenergie um den Gleichgewichtsabstand. Wie groß ist die Bindungsenergie pro Flächenelement?

- b) Betrachten Sie eine isotrope Streckung der Atomanordnung. Berechnen Sie die Energiezunahme in Abhängigkeit des Streckfaktors. Welche Gleichung erhalten Sie hiermit für die elastischen Konstanten λ und μ ?
- c) Machen Sie die analoge Überlegung wie in b) für eine Scherung. Hieraus und aus dem Ergebnis von b) ergibt sich $\lambda(V_0, s)$ und $\mu(V_0, s)$.