

# Übungsblatt 4

## Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I

### Klassische Feldtheorie

WS 2018/19

Fakultät Mathematik und Physik

Universität Stuttgart

Prof. Dr. R. Hilfer

#### Aufgabe 1:

(3 Punkte)

Gegeben sei ein ebenes Spannungsfeld, ausgedrückt durch einen Cauchy-Spannungstensor  $\mathbf{T}$ . Weiter seien  $t_n$  und  $t_s$  Normal- und Schubspannung bezüglich einer Geraden, deren Normale  $\mathbf{n}$  im Hauptachsensystem die Komponenten  $n_i$  ( $i = (1, 2)$ ) besitze. Für die Hauptspannungen  $\sigma_i$  gelte die Beziehung  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

- Berechnen Sie aus den Hauptspannungen  $\sigma_i$  die Normalspannung  $t_n$  sowie den Ausdruck  $t_n^2 + t_s^2$ . (Ergebnis:  $t_n = n_1^2 \sigma_1 + n_2^2 \sigma_2$ ,  $t_n^2 + t_s^2 = n_1^2 \sigma_1^2 + n_2^2 \sigma_2^2$ .)
- Bestimmen Sie  $t_s$  in Abhängigkeit von  $t_n$ . Eliminieren Sie hierzu  $n_1$  und  $n_2$  aus den resultierenden Gleichungen unter Zuhilfenahme der Beziehung  $n_1^2 + n_2^2 = 1$ .

*Hinweis:* Als Ergebnis erhalten Sie den Mohrschen Spannungskreis

$$t_s^2 + \left[ t_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right]^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2.$$

- Zeigen Sie, dass die maximale Schubspannung gegeben ist durch

$$(t_s)_{\max} = \frac{1}{2} [(t_n)_{\max} - (t_n)_{\min}].$$

**Aufgabe 2:****(3 Punkte)**

In Aufgabe 1 auf diesem Blatt haben Sie für ein zweidimensionales Spannungsfeld den Mohrschen Spannungskreise berechnet, der bei gegebenem Spannungstensor eine eindeutige Beziehung zwischen Normal- und Schubspannung herstellt. Im dreidimensionalen Fall existiert diese eindeutige Beziehung nicht mehr. Jedoch gibt es drei Mohrsche Spannungskreise, die die Normal- und Schubspannungen auf ein bestimmtes Gebiet eingrenzen. Das Gebiet soll hier ermittelt werden. Dazu sei ein dreidimensionales Spannungsfeld gegeben, für dessen Hauptspannungen  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  die Beziehung  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  gelte.

- a) Berechnen Sie die Normalspannung  $t_n$  sowie den Ausdruck  $t_n^2 + t_s^2$  ( $t_s$  ... Schubspannung) in Abhängigkeit der Hauptspannungen  $\sigma_i$  und der Komponenten  $n_i$  des Flächenvektors. Arbeiten Sie dazu im Eigensystem des Spannungstensors.
- b) Leiten Sie aus den Beziehungen in a) mit Hilfe der Normierungsbedingung für den Flächenvektor,  $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ , drei Gleichungen ab, zum Beispiel  $n_1^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) = t_s^2 + (t_n - \sigma_2)(t_n - \sigma_3)$ . Mit Hilfe von  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  folgen daraus drei Ungleichungen, die das gesuchte Gebiet im  $t_n - t_s$  Diagramm beschreiben. Was sind die Mohrschen Spannungskreise?
- c) Wodurch ist die maximale Schubspannung gegeben?

**Aufgabe 3:****(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für die Determinante  $\Delta$  einer Jacobischen Matrix  $F_{ik}$ , die auch als Deformationsgradient bezeichnet wird, und ihr dazugehöriges Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  folgende Beziehung gilt:

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta \operatorname{div} \mathbf{v}.$$