

# Übungsblatt 4

## Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I Klassische Feldtheorie WS 2015/16

Fakultät Mathematik und Physik  
Universität Stuttgart  
Prof. Dr. R. Hilfer

### Aufgabe 1 (Votieraufgabe):

(3 Punkte)

- a) Welche Bedingung müssen die Elemente eines symmetrischen zweidimensionalen Tensors  $\epsilon$  erfüllen, damit  $\epsilon$  der linearisierte Greensche Verzerrungstensor eines ebenen Verschiebungsfeldes ist? Vergleichen Sie mit der Bedingung, daß ein zweidimensionales Kraftfeld ein Potential besitzt.

*Hinweis:*

Drücken Sie zunächst die Komponenten  $\epsilon_{ij}$  durch Ableitungen  $\partial u_i / \partial \xi_j$  aus. Welche Relation zwischen den zweiten Ableitungen von  $\epsilon_{ij}$  besteht somit?

(2 Punkte)

- b) Wenden Sie das Ergebnis aus a) auf einen Tensor der Form

$$\epsilon(\xi) = \begin{pmatrix} a(\xi_1^2 - \xi_2^2) & b\xi_1\xi_2 \\ b\xi_1\xi_2 & a\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}$$

an. Welche Bedingung ergibt sich für  $a$  und  $b$ ? Wie lautet das Verschiebungsfeld?  
(1 Punkt)

**Aufgabe 2 (Votieraufgabe):****(3 Punkte)**

Gegeben sei ein ebenes Spannungsfeld, ausgedrückt durch einen Cauchy-Spannungstensor  $\mathbf{T}$ .  $t_n$  und  $t_s$  seien Normal- und Schubspannung bezüglich einer Geraden, deren Normale  $\mathbf{n}$  im Hauptachsensystem die Komponenten  $n_i$  ( $i = (1, 2)$ ) besitze. Für die Hauptspannungen  $\sigma_i$  gelte die Beziehung  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

- a) Berechnen Sie aus den Hauptspannungen  $\sigma_i$  die Normalspannung  $t_n$  sowie den Ausdruck  $t_n^2 + t_s^2$ .  
(Ergebnis:  $t_n = n_1^2 \sigma_1 + n_2^2 \sigma_2$ ,  $t_n^2 + t_s^2 = n_1^2 \sigma_1^2 + n_2^2 \sigma_2^2$ .) (1 Punkt)
- b) Bestimmen Sie  $t_s$  in Abhängigkeit von  $t_n$ . Eliminieren Sie hierzu  $n_1$  und  $n_2$  aus den resultierenden Gleichungen unter Zuhilfenahme der Beziehung  $n_1^2 + n_2^2 = 1$ .  
Hinweis: Als Ergebnis erhalten Sie den Mohrschen Spannungskreis  
 $t_s^2 + [t_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}]^2 = (\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2})^2$ . (1 Punkt)
- c) Zeigen Sie, dass die maximale Schubspannung durch  
 $(t_s)_{max} = \frac{1}{2} \{ (t_n)_{max} - (t_n)_{min} \}$  gegeben ist. (1 Punkt)

**Aufgabe 3 (Hausaufgabe):****(4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass für die Determinante  $\Delta$  einer Jacobischen Matrix  $F_{ik}$ , die auch als Deformationsgradient bezeichnet wird, und ihr dazugehöriges Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  folgende Beziehung gilt:

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta \operatorname{div} \mathbf{v}.$$