Das einfache Pendel

Hier wird kurz abgerissen, wie man die Schwingungsdauer eines Pendels durch direktes Integrieren und ohne die Annahme $\sin(x) = x$ berechnen kann.

Separation und Integration

Wir starten mit der Differentialgleichung des Pendels

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta. \tag{1}$$

Multiplizieren wir beide Seiten mit $\dot{\theta}$ und integrieren, so erhalten wir

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{l}\cos\theta + C. \tag{2}$$

Die Integrationskonstante können wir aus der Anfangsbedingung $\dot{\theta} = 0$ bei $t = 0$ bestimmen und erhalten, wenn wir nach $\dot{\theta}$ auflösen:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0} \tag{3}$$

Bedenkt man, dass die gesamte Periode T das Vierfache der Zeit beträgt, die das Pendel benötigt um von $\theta = 0$ zu $\theta = \theta_0$ zu gelangen, so erhält man durch Separation und direktes Integrieren:

$$T = 41sqrt\frac{l}{2g}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \tag{4}$$

Umformen des Integrals

Gleichung (4) ist ein elliptisches Integral der ersten Art. Leider ist die obere Integrationsgrenze für die Auswertung noch ungeschickt gewählt (Nulldivision). Mit elliptischen Integralen hat sich Legendre aber zum Glück sehr lange beschäftigt und eine „Standardform“ definiert, in die wir Gleichung (4) bringen können.

Benutzt man die Identität

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = 2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) \tag{5}$$

und die Substitution

$$\sin\xi = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}} \tag{6}$$

so erhält man die auf dem Übungsblatt vorgestellten Formeln:

$$
\begin{aligned}
T &= 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right) \quad \text{mit} && (7)\\
K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}} && (8)
\end{aligned}
$$

$K(k)$ ist das *vollständige elliptische Integral* erster Art. Normalerweise sind solche Standardformen interessant, weil es für sie bereits berechnete und tabellierte Werte gibt. Für uns ist sie hier aber von Vorteil, weil die Integrationsgrenzen keine Auswertungsprobleme mehr machen.