# Übungsblatt 3

# Relativitätstheorie II

Sommersemester 2018
Fakultät für Physik, Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

**Aufgabe 1** **6 Punkte**

Sei $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die Einheitskugelfläche mit dem bekannten Atlas $\{(\mathbb{S}^2 \setminus \{p_+\}, \Psi_+), (\mathbb{S}^2 \setminus \{p_-\}, \Psi_-)\}$, wobei $p_\pm := (0, 0, \pm 1)$, aus der Vorlesung (siehe Hinweis). Außerdem sei das konstante Vektorfeld $\mathbf{v}_x \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (1, 0)$ auf $\mathbb{R}^2$ gegeben.

1. Zeigen Sie: Durch $\mathfrak{X} := (\mathrm{D}\Phi_+ \cdot \mathbf{v}_x) \circ \Psi_+$ ist (implizit) ein glattes Vektorfeld $\mathfrak{X}$ auf $\mathbb{S}^2$ definiert, wobei $\mathrm{D}\Phi_+$ die Funktionalmatrix der Abbildung $\Phi_+ = \Psi_+^{-1}$ in *kartesischen* Koordinaten ist. Berechnen Sie dazu $\mathrm{D}\Psi_\pm$, $\mathrm{D}\Phi_\pm$ und $\mathrm{D}(\Psi_\pm \circ \Phi_\mp)$, sowie die Koordinatendarstellung $\mathbf{w}_x := (\mathrm{D}\Psi_- \cdot \mathfrak{X}) \circ \Phi_-$ des Vektorfeldes $\mathfrak{X}$ in der Karte $\Psi_-$.
2. Skizzieren Sie das Vektorfeld $\mathfrak{X}$ möglichst detailgetreu. Um auch am Nordpol eine gute Darstellung zu gewährleisten, skizzieren Sie zuerst $\mathbf{w}_x$. Nutzen Sie dazu, daß die Integralkurven von $\mathbf{v}_x$ Geraden sind und daß $\Phi_\pm$ und $\Psi_\pm$ verallgemeinerte Kreise bewahren. (verallgemeinerter Kreis = Kreis oder Gerade)
3. Führen Sie die Schritte 2. und 3. in Gedanken für $\mathbf{v}_y = (0, 1)$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathbf{w}_y$ nochmals durch. Was ändert sich?

*Hinweis:* Die Koordinatenabbildungen $\Psi_\pm$ sind stereographische Projektionen. In kartesischen Koordinaten sind diese gegeben durch

$$\Psi_\pm \colon \mathbb{S}^2 \setminus \{p_\pm\} \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{s} = (x, y, z)^{\mathrm{t}} \mapsto \left( \frac{x}{1 \mp z}, \frac{y}{1 \mp z} \right)^{\mathrm{t}}.$$

Die Umkehrabbidungen $\Phi_\pm := \Psi_\pm^{-1}$ sind gegeben durch

$$\Phi_\pm \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{p_\pm\}, \quad (x, y)^{\mathrm{t}} \mapsto \left( \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \mp \frac{1 - (x^2 + y^2)}{1 + x^2 + y^2} \right)^{\mathrm{t}}.$$

*Bitte wenden!*

**Aufgabe 2** **3 Punkte**

Zeigen Sie, dass die Menge der Vektoren mit $g(x,x) > 0$ in einem Lorentzraum in zwei disjunkte Kegel zerfällt.

(Hinweis: Ein Kegel ist eine Menge $K$ von Vektoren, sodass falls $x \in K$ auch $ax \in K$ für alle reellen Zahlen $a > 0$ gilt.)

**Aufgabe 3** **4 Punkte**

a) Zeigen Sie, dass für jeden zeitartigen Vektor $x$ eines Lorentzraums $E$ (d.h. $g(x,x) > 0$) der Unterraum

$$F = \{y \in E : g(x,y) = 0\} \tag{1}$$

ausgestattet mit der Metrik $-g$ ein euklidischer Vektorraum ist.

b) Zeigen Sie: Für zwei zukunftsweisende Vektoren $x$, $z$ eines Lorentzraums $E$ mit $g(x,x) = g(z,z) = 1$ gilt $g(x,z) \geq 1$.