Übungsblatt 8
Theoretische Physik V : Kontinuumsmechanik
WS 2009/10

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe): **(2 Punkte)**

Aus der Ladungserhaltung folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0.$$

Im Folgenden wird der stationäre Fall angenommen ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$).

a) Zeigen Sie, dass im stationären Fall durch jeden Querschnitt derselbe Strom fließt. Zerteilen Sie hierfür exemplarisch die Oberfläche $S(V)$ eines Volumens V, durch die ein Strom fließe, in zwei Teile.

b) Vier Leiter seien durch einen Knoten, der sich in einem Gebiet mit dem Volumen V befindet, verbunden. Zwei Leiter sollen einen Strom (I_1 bzw. I_2) in das Gebiet hineintragen und zwei Leiter sollen einen Strom (I_3 bzw. I_4) hinaustragen. Zeigen Sie, dass am Leiterknoten die Summe der zufließenden gleich die Summe der abfließenden Ströme ist (*Kirchhoff* sche Knotenregel).

Aufgabe 2 (Votieraufgabe): **(4 Punkte)**

Die elastische Energie eines Festkörpers schreibt sich in hookescher Näherung als

$$W = \frac{1}{2} E_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}.$$

a) Für ein isotropes Medium gilt

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Wie lautet der Spannungstensor $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\epsilon_{kl}$ und die elastische Energie in Abhängigkeit von ϵ_{ij}?

b) Die elastische Energie W ist eine quadratische Form der 6 unabhängigen Komponenten des Verzerrungstensors, die für jede Wahl des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\epsilon} \neq 0$ größer als null sein muss (warum?). Leiten Sie hieraus Bedingungen für μ und λ her.
Hinweis:
1. Möglichkeit: Schreiben Sie die elastische Energie als quadratische Form. Welche Bedingung gilt für die Eigenwerte der entsprechenden Matrix?
2. Möglichkeit: Zerlegen Sie den Verzerrungstensor $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)} = 1/3\epsilon_{kk}\delta_{ij} + (\epsilon_{ij} - 1/3\epsilon_{kk}\delta_{ij})$ (physikalische Bedeutung?) und schreiben Sie die elastische Energie in Abhängigkeit von $\epsilon_{ij}^{(1)}$ und $\epsilon_{ij}^{(2)}$.

Aufgabe 3 (Hausaufgabe): (4 Punkte)

a) Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung eines thermoelastischen Materials lautet

$$\sigma = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \mathrm{Sp}\boldsymbol{\epsilon}\,\mathbf{1} - \beta(T - T_0)\,\mathbf{1},$$

wobei T_0 eine Referenztemperatur ist. Bestimmen Sie β derart, dass ohne äußere Spannung die Ausdehnung linear von der Temperatur abhängt und der thermische Ausdehnungskoeffizient α beträgt.

b) Betrachten Sie nun eine inhomogene Temperaturverteilung T. Welcher Differentialgleichung muß T gehorchen, damit sich ein spannungsfreier Zustand ergibt? *Hinweis:*
Verwenden Sie die Kompatibilitätsbedingungen für $\boldsymbol{\epsilon}$ aus der Vorlesung.