Übungsblatt 3

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I+II

Klassische Feldtheorie
WS 2013/14

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe): **(3 Punkte)**

a) Bestimmen Sie den Deformationsgradienten für die Deformation $x_1 = \xi_1 + \alpha\xi_2$, $x_2 = \xi_2$, $x_3 = \xi_3$. Beschreiben Sie die Deformation geometrisch. Gibt es materielle Linienelemente dξ, deren Richtung bei der Deformation sich nicht ändert? Wie ändert sich das Volumen?

b) Geben Sie die Deformation $F(\xi)$ für eine zweiachsige, isochore Streckung an. Gibt es auch hier Linienelemente dξ, die bei der Deformation ihre Richtung nicht ändern?

c) Bestimmen Sie für das ebene Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

die Abbildung $\mathbf{x}(\xi, \mathbf{t})$ sowie den Deformationsgradienten $\mathbf{F}(\xi, \mathbf{t})$.

Aufgabe 2 (Votieraufgabe): **(3 Punkte)**

Gegeben sei ein Verschiebungsfeld $u(\xi) = x(\xi) - \xi = A\xi$. Ist A unabhängig von ξ, so handelt es sich um eine homogene Deformation. Bestimmen Sie für folgende homogene Deformationen ($0 < c < 1$) den Greenschen Verzerrungstensor, den Rechts-Streck-Tensor U mit seinen Hauptachsen, den Drehtensor R und den Drehwinkel φ. Skizzieren Sie jeweils die Deformation eines Einheitskreises.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (Hausaufgabe): (5 Punkte)

a) Bei kleinen Verschiebungen u lässt sich der Deformationsgradient schreiben als $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \delta\mathbf{F}$ mit $\delta F_{ij} = \partial u_i / \partial \xi_j$. Zeigen Sie, dass für die polare Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ in linearer Näherung gilt

$$U = I + \delta F_{sym},$$

$$R = I + \delta F_{anti},$$

wobei δF_{sym} der symmetrische und δF_{anti} der antisymmetrische Anteil von δF ist. (2 Punkte).

b) Zeigen Sie, dass für die Volumendilatation $(\mathrm{d}\tilde{V} - \mathrm{d}V)/\mathrm{d}V = \det F - 1$ gilt:

$$\det F - 1 = \mathrm{Sp}\ \delta\mathbf{F}_{sym} = \mathrm{div}\ u.$$

(1 Punkt).

c) Die Eigenwerte bzw. Eigenvektoren von ε nennt man Hauptdeformationen bzw. Hauptdeformationsrichtungen. Was bedeuten positive (negative) Eigenwerte? Beschreiben Sie die Verformung einer Kugel mit Radius R (ε in Diagonalform). Wie ändert sich ihr Volumen? (1 Punkt).

d) Eine Dehnungsfläche ist definiert durch $x^T \varepsilon x = const$. Zeigen Sie, dass bei reiner Verzerrung die Verschiebung u eines materiellen Punktes P parallel zur Normalen n der Dehnungsfläche an der Stelle x_P ist (Poinsotsche Konstruktion). Wo findet die Poinsotsche Konstruktion außerhalb der Kontinuumsmechanik Anwendung? (1 Punkt).