Übungsblatt 10

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie II

Klassische Feldtheorie

SS 2019

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1: **(8 Punkte)**

Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$c_v \rho \frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{x}, t) = \lambda \, \Delta T(\mathbf{x}, t) \qquad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \ t > 0. \tag{1}$$

1. Geben Sie, analog zu Gleichung (VII.2.21) aus der Vorlesung eine Integraldarstellung der Lösung der Wärmeleitungsgleichung (1) an die der Anfangsbedingung $T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x})$ genügt.

2. Zeigen Sie, dass die in 1. gefundene Integraldarstellung die Wärmeleitungsgleichung (1) für eine beschränkte Funktion $T_0(\mathbf{x})$ löst.

3. Berechnen Sie die Lösung der Wärmeleitungsgleichung (1) für einen unendlich langen Draht ($d = 1$) mit der Anfangsbedingung

$$T_0(x) = \begin{cases} b_1 & \text{für } -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ b_2 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

4. Für einen Eisendraht ist $\lambda = 80\,\mathrm{W/(Km)}$, $c_v = 450\,\mathrm{J/(kgK)}$ und $\rho = 7870\,\mathrm{kg/m^3}$. Die Parameter der Anfangsbedingung (2) werden spezifiziert mit $b_1 = 1000\,^\circ\mathrm{C}$, $b_2 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ und $L = 2\,\mathrm{m}$. Zu welchem Zeitpunkt t ist die Temperatur T an dem Ort $x = 0\,\mathrm{m}$ zum ersten Mal kleiner als $T = 500\,^\circ\mathrm{C}$?

   Wie hängt dieser Zeitpunkt t von dem Temperaturunterschied $\Delta b = b_1 - b_2$?

Aufgabe 2: **(2 Punkte)**

Aus der Ladungserhaltung folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{3}$$

Im Folgenden wird der stationäre Fall angenommen ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$).

1. Zeigen Sie, daß im stationären Fall durch jeden Querschnitt derselbe Strom fließt. Zerteilen Sie hierfür exemplarisch die Oberfläche $S(V)$ eines Volumens V, durch die ein Strom fließe, in zwei Teile.

2. Vier Leiter seien durch einen Knoten, der sich in einem Gebiet mit dem Volumen V befindet, verbunden. Zwei Leiter sollen einen Strom (I_1 bzw. I_2) in das Gebiet hineintragen und zwei Leiter sollen einen Strom (I_3 bzw. I_4) hinaustragen. Zeigen Sie, daß am Leiterknoten die Summe der zufließenden gleich der Summe der abfließenden Ströme ist (*Kirchhoff*sche Knotenregel).

Aufgabe 3: **(8 Punkte)**

Betrachten Sie ein System von geladenen Teilchen, auf die nur die Lorentzkraft des elektromagnetischen Feldes wirken soll.

1. Begründen Sie die mechanische Impulsbilanz für den Gesamtimpuls $\mathbf{p}_V^{(\mathrm{mech})}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}_V^{(\mathrm{mech})} = \int \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B})\,\mathrm{d}^3\mathbf{x}. \tag{4}$$

2. Eliminieren Sie ρ und $\mathbf{j}$ durch die inhomogenen Maxwell-Gleichungen. Bringen Sie die Terme auf die Form

$$\rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} = \mathbf{E}\operatorname{div}\mathbf{D} + \mathbf{H}\operatorname{div}\mathbf{B} + \operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{B} - \partial_t(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) - \mathbf{D}\times\operatorname{rot}\mathbf{E}. \tag{5}$$

Hinweis: Die homogonen Maxwell-Gleichungen lauten:

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \tag{6}$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \partial_t\mathbf{B} = 0 \tag{7}$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen lauten:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho \tag{8}$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \partial_t\mathbf{D} = \mathbf{j} \tag{9}$$

Materialgleichungen linearer Medien lauten:

$$\mathbf{B} = \mu_r\mu_0\mathbf{H} \tag{10}$$
$$\mathbf{D} = \epsilon_r\epsilon_0\mathbf{E} \tag{11}$$

3. Berechnen Sie mit Hilfe des Impulses des elektromagnetischen Feldes

$$\mathbf{p}_V^{(\mathrm{Feld})} = \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B})\, \mathrm{d}^3\mathbf{x} \tag{12}$$

die Gesamtimpulsbilanz $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{p}_V^{(\mathrm{mech})} + \mathbf{p}_V^{(\mathrm{Feld})})$. Sie ist symmetrisch in magnetischen und elektrischen Größen.

4. Zeigen Sie, dass für ein lineares, homogenes Medium gilt:

$$(\mathbf{E}\, \mathrm{div}\, \mathbf{D} - \mathbf{D} \times \mathrm{rot}\, \mathbf{E})_i = \epsilon_r \epsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(E_i E_j - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ij} \right) \tag{13}$$

und analog:

$$(\mathbf{H}\, \mathrm{div}\, \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathrm{rot}\, \mathbf{H})_i = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij} \right). \tag{14}$$

5. Mit Hilfe des Maxwellschen Spannungstensors $\mathbf{T}$ kann die Impulsbilanz wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\mathbf{p}_V^{(\mathrm{mech})} + \mathbf{p}_V^{(\mathrm{Feld})} \right) = \int_V \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}. \tag{15}$$

Geben Sie T_{ij} an.

6. Formen Sie das Ergebnis aus 5.) mit Hilfe des Gaußschen Satzes um. Interpretieren Sie das Ergebnis.

7. Berechnen Sie die Kraft zwischen den Platten eines Kondensators ($\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} = (0, 0, -E)$).