

Übungsblatt 1
Theoretische Physik III: Elektrodynamik
SS 2014

Fakultät Mathematik und Physik, Universität Stuttgart
Prof. Dr. Dr. R. Hilfer
A. Lemmer (andreas.lemmer@icp.uni-stuttgart.de)

Aufgabe 1 (Votieraufgabe)

4 Punkte

Leiten Sie die folgenden Beziehungen her:

1. Gradient eines Skalarprodukts:

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (1)$$

2. Divergenz eines Vektorprodukts:

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (2)$$

3. Rotation eines Vektorprodukts:

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) \quad (3)$$

4. Laplace-Operator:

$$\Delta \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (4)$$

mit $\Delta := \nabla \cdot \nabla$.

Aufgabe 2 (Votieraufgabe)

3 Punkte

Die zeitabhängigen Vektorfelder $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ mit $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$ erfüllen die Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}. \quad (5)$$

Zeigen Sie: Wenn $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$ für alle \mathbf{r} zu einem Zeitpunkt $t = t_0$, dann gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{B} \equiv 0 \quad (6)$$

für allen Zeiten $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (Hausaufgabe)**8 Punkte**

Zur mathematischen Beschreibung von Punktteilchen (Punktladungen, -massen) verwendet man die sog. Dirac'sche δ -Funktion $\delta(x)$. Sie ist keine Funktion im gewöhnlichen Sinne, sondern eine verallgemeinerte Funktion (Distribution).

- (a) Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und eine Folge glatter Funktionen $\delta_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x) = 0 \text{ für } x \neq 0 \quad (1a)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x) dx = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} f(x)\delta_n(x), n \in \mathbb{N} \text{ ist integrierbar und für jedes } s > 0 \\ \text{gibt es integrierbare Funktionen } g : \mathbb{R} \setminus (-s, s) \rightarrow [0, \infty) \\ \text{mit } |f(x)\delta_n(x)| \leq g(x) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1c)$$

Zeigen Sie,

- (1) dass die Funktionenfolgen

$$\delta_{1,n}(x) := n \exp(-\pi n^2 x^2) \text{ und} \quad (2a)$$

$$\delta_{2,n}(x) := \frac{n}{\pi(n^2 x^2 + 1)} \quad (2b)$$

die Eigenschaften (1a) und (1b) erfüllen. Skizzieren Sie $\delta_{1,n}$ und $\delta_{2,n}$ als Funktionen von x und diskutieren Sie die Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$. Welche der Funktionenfolgen erfüllen die Eigenschaft (1c) für $f(x) := x^2$?

- (2) dass aus den Eigenschaften (1a) – (1c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)\delta_n(x) dx = \begin{cases} f(0) & , 0 \in (a, b) \\ 0 & , 0 \notin [a, b] \end{cases} \quad (3)$$

folgt. Insbesondere kommt es also *nicht* auf die konkrete Wahl der δ_n an. Beachten Sie, dass die Fälle $a = 0$ und $b = 0$ unbestimmt bleiben.

Hinweis: Eigenschaft (1c) stellt sicher, dass der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ und eine Integration über $[a, b] \setminus (-s, s)$ vertauscht werden dürfen.

- (b) Die Dirac'sche δ -“Funktion” wird durch den symbolischen Grenzübergang “ $\delta(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x)$ ” veranschaulicht, der so zu verstehen ist, dass er *nach* einer Integration bzgl. x zu vollziehen ist (vgl. (3)):

$$\int_a^b f(x)\delta(x-y)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)\delta_n(x-y)dx = \begin{cases} f(y) & , y \in (a, b) \\ 0 & , y \notin [a, b] \end{cases} \quad (4)$$

Das Integral in Gl. (4) ist ein lineares Funktional von f und wird δ -Distribution genannt.

Zeigen Sie:

(1)

$$\frac{d}{dx}\Theta(x-y) = \delta(x-y),$$

wobei Θ die Heavyside-Funktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

ist.

(2)

$$\delta(h(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|h'(x_k)|},$$

wobei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit einfachen Nullstellen x_k ist, d.h. $h(x_k) = 0$ und $h'(x_k) \neq 0$.

(3)

$$f(x)\frac{d}{dx}\delta(x) = -\delta(x)f'(x).$$

(4)

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp(\pm iqx) dq.$$

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $f(x)$ eine Fouriertransformierte besitzt.