

Übungsblatt 1

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I

Klassische Feldtheorie

WS 2015/16

Fakultät Mathematik und Physik

Universität Stuttgart

Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe):

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass man jeden Tensor \mathbf{F} mit $\det \mathbf{F} > 0$ wie folgt "polar" in ein Produkt zerlegen kann

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}. \quad (1)$$

Dabei ist \mathbf{R} eigentlich orthogonal ($\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ und $\det \mathbf{R} = +1$), und \mathbf{U} und \mathbf{V} sind positiv definit. (Ein symmetrischer Tensor \mathbf{A} heisst positiv definit, wenn für alle Vektoren $\mathbf{a} \neq 0$ gilt $(\mathbf{A}\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} > 0$).

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Zeigen Sie, dass $(\mathbf{F}\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{F}\mathbf{a}) = (\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} > 0$ für alle $\mathbf{a} \neq 0$ gilt.
- Setzen Sie, dass $\mathbf{U} = (\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{1/2}$ und $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$. Zeigen Sie, dass dann \mathbf{R} eigentlich orthogonal und \mathbf{U} positiv definit ist.
- Zeigen Sie Eindeutigkeit der Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$. Nehmen Sie dazu an, es gäbe zwei verschiedene Zerlegungen ($\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{R}'\mathbf{U}'$) und zeigen Sie durch Einschleiben von \mathbf{I} dass $\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}'^2$.
- Schliessen Sie von $\mathbf{V} = (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{1/2}$ auf die Zerlegungen $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$.

Aufgabe 2 (Votieraufgabe):

(2 Punkte)

Ein kovarianter Vektor (Tensor erste Stufe) habe in rechtwinkligen Koordinaten die Komponenten xy , $2y - z^2$ und xz . Wie lauten seine kovarianten Komponenten in Kugelkoordinaten?

Aufgabe 3 (Hausaufgabe):**(4 Punkte)**Bestimmen Sie für die $(2, 0)$ -Tensoren

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \\ &\quad + 4\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - 1\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 - 1\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{M} &= 1\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \\ &\quad + 4\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - 1\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + 1\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

(die Basiseinheitsvektoren des kartesischen Koordinatensystems sind mit \mathbf{e}_i bezeichnet und $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ist ihr Tensorprodukt).

- den transponierten Tensor.
- die Spur.
- den Kugeltensor ($\mathbf{T}^{\mathbf{K}} = \frac{1}{3}T_k^k \delta^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$) und den Deviator ($\mathbf{T}^{\mathbf{D}} = \mathbf{T} - \mathbf{T}^{\mathbf{K}}$) sowie die Spur des Kugeltensors und des Deviators.
- und den inversen Tensor.