Übungsblatt 4

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I

Klassische Feldtheorie

WS 2016/17

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe): **(3 Punkte)**

Gegeben sei ein ebenes Spannungsfeld, ausgedrückt durch einen Cauchy-Spannungstensor $\mathbf{T}$. t_n und t_s seien Normal- und Schubspannung bezüglich einer Geraden, deren Normale $\mathbf{n}$ im Hauptachsensystem die Komponenten n_i $(i = (1,2))$ besitze. Für die Hauptspannungen σ_i gelte die Beziehung $\sigma_1 > \sigma_2$.

a) Berechnen Sie aus den Hauptspannungen σ_i die Normalspannung t_n sowie den Ausdruck $t_n^2 + t_s^2$.
(Ergebnis: $t_n = n_1^2\sigma_1 + n_2^2\sigma_2,\ t_n^2 + t_s^2 = n_1^2\sigma_1^2 + n_2^2\sigma_2^2$.) (1 Punkt)

b) Bestimmen Sie t_s in Abhängigkeit von t_n Eliminieren Sie hierzu n_1 und n_2 aus den resultierenden Gleichungen unter Zuhilfenahme der Beziehung $n_1^2 + n_2^2 = 1$.
Hinweis: Als Ergebnis erhalten Sie den Mohrschen Spannungskreis
$t_s^2 + [t_n - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}]^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2$. (1 Punkt)

c) Zeigen Sie, dass die maximale Schubspannung durch
$(t_s)_{max} = \frac{1}{2}\{(t_n)_{max} - (t_n)_{min}\}$ gegeben ist. (1 Punkt)

Aufgabe 2 (Votieraufgabe): (4 Punkte)

In Aufgabe 1 auf diesem Blatt haben Sie für ein zweidimensionales Spannungsfeld den Mohrschen Spannungskreis berechnet, der bei gegebenem Spannungstensor eine eindeutige Beziehung zwischen Normal- und Schubspannung herstellt. Im dreidimensionalen Fall existiert diese eindeutige Beziehung nicht mehr. Jedoch gibt es drei Mohrsche Spannungskreise, die die Normal- und Schubspannungen auf ein bestimmtes Gebiet eingrenzen. Das Gebiet soll hier ermittelt werden. Dazu sei ein dreidimensionales Spannungsfeld gegeben, für dessen Hauptspannungen $\sigma_i, \ i = 1, 2, 3$ die Beziehung $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ gelte.

a) Berechnen Sie die Normalspannung t_n sowie den Ausdruck $t_n^2 + t_s^2$ (t_s...Schubspannung) in Abhängigkeit der Hauptspannungen σ_i und der Komponenten n_i des Flächenvektors. Arbeiten Sie dazu im Eigensystem des Spannungstensors. (1 Punkt).

b) Leiten Sie aus den Beziehungen in a) mit Hilfe der Normierungsbedingung für den Flächenvektor, $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, drei Gleichungen ab (z. B.: $n_1^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) = t_s^2 + (t_n - \sigma_2)(t_n - \sigma_3)$). Mit Hilfe von $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ folgen daraus drei Ungleichungen, die das gesuchte Gebiet im $t_n - t_s$ Diagramm beschreiben. Was sind die Mohrschen Spannungkreise? (2 Punkte).

c) Wodurch ist die maximale Schubspannung gegeben? (1 Punkte).

Aufgabe 3 (Hausaufgabe): (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Determinante Δ einer Jacobischen Matrix F_{ik}, die auch als Deformationsgradient bezeichnet wird, und ihr dazugehöriges Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ folgende Beziehung gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t} = \Delta \mathrm{div}\, \mathbf{v}.$$