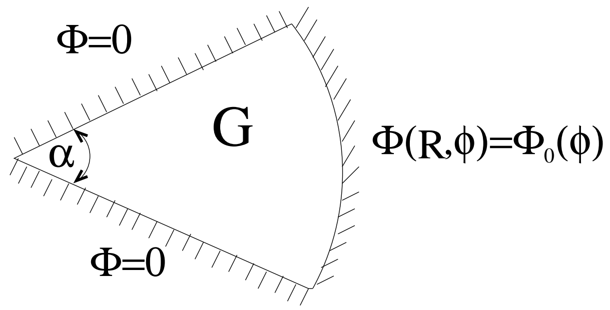
Übungsblatt 6
Theoretische Physik III: Elektrodynamik
SS 2014

Fakultät Mathematik und Physik, Universität Stuttgart
Prof. Dr. Dr. R. Hilfer
A. Lemmer (andreas.lemmer@icp.uni-stuttgart.de)

Aufgabe 1 (Votieraufgabe) **4 Punkte**



Lösen Sie das zweidimensionale Randwertproblem für das elektrostatische Potential in dem im Schaubild gezeigten Gebiet durch Separation der Variablen. Das Gebiet G besitze keine Ladung. Die Potentialfunktion $\Phi(\boldsymbol{r})$ nimmt die Randwerte $\Phi = 0$ auf beiden Seiten des Winkels α und $\Phi = \Phi_0(\varphi)$ auf dem Kreisbogen an. Berechnen Sie $\Phi(\boldsymbol{r})$ in G.

Aufgabe 2 (Votieraufgabe) **4 Punkte**

Man betrachte das zweidimensionale Potentialproblem

$$\Delta\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r})$$

für eine gegebene Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$ innerhalb des Einheitskreises

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\varphi) = \cos(\varphi)\boldsymbol{e}_x + \sin(\varphi)\boldsymbol{e}_y \quad , \quad 0 \le \varphi < 2\pi$$

mit Dirichlet-Randbedingungen $\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_0(\boldsymbol{r})$ auf dem Kreis.
Bestimmen Sie die Greensche Funktion und berechnen Sie das Potential $\phi(\boldsymbol{r})$ innerhalb des Kreises für $\rho(\boldsymbol{r}) = q\,\delta(\boldsymbol{r})$ und $\phi_0(\boldsymbol{r}) = \cos(\varphi)$.

Hinweise: Die Greensche Funktion für Dirichlet-Randbedingungen $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ kann geschrieben werden als Summe

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = G_\infty(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) + f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) \quad ,$$

wobei $G_\infty(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ die Greensche Funktion für ein im Unendlichen verschwindendes Potential $\phi(\boldsymbol{r})$ ist. Bestimmen Sie $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ so, dass $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = 0$ auf dem Kreis $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\varphi)$ gilt. Dies kann erreicht werden mit der Methode der Bildladungen. Für jeden Punkt $\boldsymbol{s}_A$ mit $\rho(\boldsymbol{s}_A) \neq 0$ innerhalb des Kreises kann man einen Bildpunkt $\boldsymbol{s}_B$ außerhalb des Kreises finden, so dass $G_\infty(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}_A) - G_\infty(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}_B)$ konstant auf dem Kreis ist.

Aufgabe 3 (Hausaufgabe) **5 Punkte**

Berechnen Sie das Potential der Flächenladungsdichte $\rho(\boldsymbol{r}) = \sigma(\vartheta, \varphi)\, \delta(|\boldsymbol{r}| - R)$ auf der Kugel $\mathbb{B}(\boldsymbol{0}, R)$ mit Mittelpunkt $\boldsymbol{0}$ und Radius R für alle $\sigma(\vartheta, \varphi)$ mit azimutaler Symmetrie, d.h. von der Form $\sigma(\vartheta, \varphi) = \sigma(\vartheta)$.

Hinweis: Entwickeln Sie $\sigma(\vartheta)$ in Legendre-Polynome $P_l(\cos\vartheta)$ als

$$\sigma(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)\, \sigma_l\, P_l(\cos\vartheta)$$

mit den Koeffizienten

$$\sigma_l = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \sigma(\vartheta)\, P_l(\cos\vartheta)\, \mathrm{d}(\cos\vartheta)$$

und benutzen Sie die allgemeine Formel aus der Vorlesung für Potentiale mit azimutaler Symmetrie $\phi(r, \vartheta, \varphi) = \phi(r, \vartheta)$.

Aufgabe 4 (Hausaufgabe) **3 Punkte**

Die komplexe Funktion $f : \mathbb{G} \mapsto \mathbb{C}\,,\ \mathbb{G} \subset \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ sei holomorph in $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}$.
Zeigen Sie, dass die reellen Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + \mathrm{i}y \in \mathbb{G}\}$ die Potentialgleichung erfüllen.