Universität Stuttgart – Institut für Computerphysik

Probeklausur

Physik auf dem Computer SS 2012

JP Dr. Axel Arnold   Dr. Olaf Lenz   Florian Fahrenberger
Dominic Röhm

6. August 2012

Name	
Vorname	
Matrikelnummer	

Hinweise

- In der Regel gibt der verfügbare freie Platz einen Hinweis darauf, welchen Umfang die Lösung haben sollte.
- Lies Dir *alle* Fragen am Anfang durch, bevor Du anfängst, sie zu beantworten.
- Falls der Platz nicht ausreichen sollte, verwende zusätzliche Blätter. Beschrifte diese unbedingt mit Deinem Namen und Matrikelnummer!
- Die Maximalpunktzahl ist 100.
- Zum Bestehen der Klausur sind 50 Punkte notwendig.

Viel Erfolg!

1 Lineare Algebra I (13 Punkte)

Aufgabe 1: (1 Punkt)
Schreibe eine beliebige (5×5)-Drei-Bandmatrix auf.

Antwort:

Aufgabe 2: (5 Punkte)
Löse das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Gaußelimination mit Totalpivotisierung und der Rücksubstitution.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 8 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -20 \\ -85 \end{pmatrix}$$

Antwort:

Aufgabe 3: (7 Punkte)

Invertiere die folgende Matrix mit Hilfe der Gaußeliminiation.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 0 & -6 & 5 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Antwort:

2 Darstellung von Funktionen (16 Punkte)

Aufgabe 4: (0 Punkte)
Wie hieß Fourier mit Vornamen?

Antwort:

Aufgabe 5: (2 Punkte)
Berechne die ersten drei Terme der Taylorentwicklung der Funktion $f(x) = \sin x$ um den Punkt $x_0 = 0$.

Antwort:

Aufgabe 6: (1 Punkt)
Wird eine Funktion durch eine immer höhere Anzahl von äquidistanten Stützstellen bei der Polynominterpolation immer besser angenähert? Warum?

Antwort:

Aufgabe 7: (1 Punkt)

Wieso ist die Funktion $f(x) = e^{3x}$ schlecht durch eine Taylorentwicklung anzunähern?

Antwort:

Aufgabe 8: (1 Punkt)

Welche Eigenschaften müssen Funktionen haben, damit sie gut für eine numerische Näherung durch eine Fouriertransformation geeignet sind?

Antwort:

Aufgabe 9: (5 Punkte)

Berechne mit Hilfe der Lagrangepolynome das interpolierende Polynom in der Form ax^2+bx+c der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

für die Chebyshev-Stützstellen in der nebenstehenden Tabelle.

k	$\mathbf{x_k}$
0	0
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Antwort:

Aufgabe 10: (1 Punkt)
Nenne einen Nachteil der Splineinterpolation gegenüber der Interpolation mit Polynomen.

Antwort:

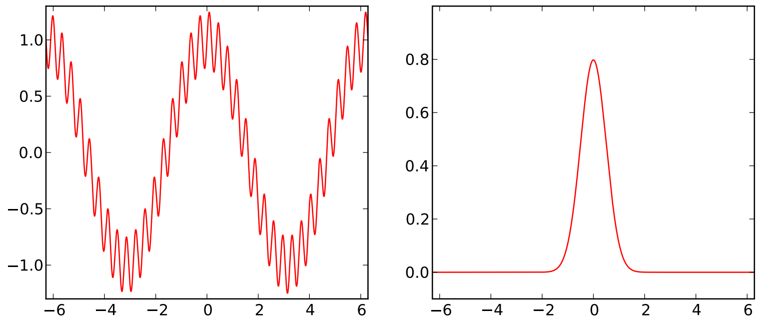
Aufgabe 11: (5 Punkte)
Berechne die Koeffizienten des Hornerschemas für ein Polynom 3. Grades mit den Nullstellen 1, 2, 3. Dabei sei der führende Koeffizient $c_3 = 1$.

Antwort:

3 Signalverarbeitung (12 Punkte)

Aufgabe 12: (3 Punkte)

Skizziere die Faltung der in nebenstehender Abbildung skizzierten Funktionen.



Antwort:

Aufgabe 13: (3 Punkte)

Welche Frequenz ist die höchste sinnvoll zu verwendende bei der diskreten Fouriertransformation eines Signals, das mit n Punkten auf dem Intervall $[0, L]$ abgetastet wird?

Antwort:

Aufgabe 14: (1 Punkt)

Von welcher Ordnung in N ist die Geschwindigkeit der diskreten (nicht der schnellen) Fouriertransformation (wobei N die Anzahl der zu transformierenden Punkte ist)?

Antwort:

Aufgabe 15: (5 Punkte)

Schreibe eine Pythonfunktion `stats(x)`, die den Mittelwert und die Standardabweichung einer Datenreihe berechnet und zurückgibt, ohne dabei die entsprechenden NumPy-Funktionen zu benutzen. Dabei sei x ein eindimensionales Numpy-Array.

Antwort:

4 Nichtlineare Gleichungssysteme (11 Punkte)

Aufgabe 16: (1 Punkt)

Wann verwendet man das gedämpfte Newtonverfahren anstelle des ungedämpften?

Antwort:

Aufgabe 17: (5 Punkte)

Schreibe ein Pythonskript, das mit Hilfe der Funktion `newton(f, fp, x0)` zur Nullstellensuche $\arcsin \frac{1}{2}$ berechnet, ohne dabei die entsprechende Pythonfunktion `asin` zu verwenden. Verwende als Startwert 0. `f` sei dabei eine mathematische Funktion, `fp` deren Ableitung, und `x0` der Startwert des Newtonverfahrens.

Antwort:

Aufgabe 18: (5 Punkte)

Berechne die ersten drei Näherungen des Newtonverfahrens für $f(x) = x^2 - 2$ mit dem Startwert $x_0 = 1$.

Antwort:

5 Numerisches Differenzieren und Integrieren (13 Punkte)

Aufgabe 19: (2 Punkte)
In welchen Fällen benutzt man die Monte-Carlo-Integration anstelle von Integrationsmethoden wie den zusammengesetzten Newton-Cotes-Formeln oder der Gaußquadratur?

Antwort:

Aufgabe 20: (4 Punkte)
Diskretisiere die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \alpha f(x) + \beta x = g(x)$ mit Hilfe folgendes Differenzenquotienten zweiter Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}f(x_i)}{\mathrm{d}x} \approx -\frac{1}{12h}f(x_{i+2}) + \frac{2}{3h}f(x_{i+1}) - \frac{2}{3h}f(x_{i-1}) + \frac{1}{12h}f(x_{i-2})$$

so dass sie für einen linearen Gleichungssystemlöser geeignet ist.

Antwort:

Aufgabe 21: (5 Punkte)
Schreibe eine Pythonfunktion, die mit Hilfe der Monte-Carlo-Integration die Kreiszahl π berechnet. Dabei sei `numpy.random.uniform()` eine Funktion, die eine Fließkommazufallszahl zwischen 0 und 1 zurückgibt.

Antwort:

Aufgabe 22: (2 Punkte)
Für welche Funktionen liefert die zusammengesetzte Simpsonregel das selbe Ergebnis wie die zusammengesetzte Mittelpunktsregel (bei beliebiger Anzahl von Stützstellen)?

Antwort:

6 Zufallszahlen (10 Punkte)

Aufgabe 23: (1 Punkt)

Beschreibe die Fouriertransformierte einer guten Zufallsfolge.

Antwort:

Aufgabe 24: (3 Punkte)

Was tut die folgende Pythonfunktion?

```
def f():
    while True:
        x = numpy.random.uniform(-1, 1)
        y = numpy.random.uniform(-1, 1)
        if x**2 + y**2 <= 1:
            return (x, y)
```

Antwort:

Aufgabe 25: (4 Punkte)

Skizziere (graphisch oder verbal), wie man mit Hilfe von gleichverteilten Zufallszahlen normalverteilte Zufallszahlen erzeugen kann.

Antwort:

Aufgabe 26: (2 Punkte)

Wozu dient der *seed* eines Zufallszahlengenerators?

Antwort:

7 Lineare Algebra II (5 Punkte)

Aufgabe 27: (1 Punkt)

Wofür benötigt man bei der Berechnung von Eigenvektoren die Inverse Iteration? Was muss man zuvor schon berechnet haben?

Antwort:

Aufgabe 28: (1 Punkt)

Erstelle eine L+D+U-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Antwort:

Aufgabe 29: (3 Punkte)

Was ist die QR-Zerlegung einer Matrix und wozu ist sie nützlich?

Antwort:

8 Optimierung (7 Punkte)

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Gesucht ist das lokale Minimum der Funktion $f(x) = \sin((x+1)(y-1))$. Führe vom Ausgangspunkt $x = y = 0$ zwei Schritte des Verfahrens des steilsten Abstiegs mit Schrittweite $\lambda = 0{,}1$ aus.

Antwort:

Aufgabe 31: (3 Punkte)
Skizziere (verbal oder graphisch) die Idee eines genetischen Algorithmus.

Antwort:

9 Programmieren (7 Punkte)

Aufgabe 32: (5 Punkte)
Schreibe ein Pythonskript, das 1000 Schritte eines eindimensionalen Randomwalks der Schrittweite ± 1 durchführt und danach die Entfernung zum Ursprung ausgibt. Eine Zufallszahl zwischen 0 und 1 erzeugt man mit Hilfe der Pythonfunktion `random.random()`.

Antwort:

Aufgabe 33: (2 Punkte)
Forme die folgende Pythonschleife in einen entsprechenden NumPy-Ausdruck (ohne Schleife in Python) um. Dabei ist `k` nicht notwendigerweise die Länge von `a` oder `b`.

```
for i in range(k): a[i] += b[i]
```

Antwort:

10 Weitere Aufgaben (6 Punkte)

Aufgabe 34: (3 Punkte)

Wenn man ein klassisches Fadenpendel als harmonischen Oszillator löst, welche der folgenden Näherungen sind numerischer und welche analytischer Natur?

- Diskretisierung der Zeit
- Reibungsfreiheit
- Rundungsfehler
- $\sin x = x$ für kleine Winkel

Antwort:

Aufgabe 35: (3 Punkte)

Wieso ist es nicht sinnvoll, für das Relaxationsverfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme eine Schrittweitensteuerung zu implementieren, wie sie beim Optimierungsverfahren der steilsten Gradienten verwendet wird (Armijo-Schrittweitensteuerung)?

Antwort: