

Gausselemination:	$a_{ik}^{(r)} = a_{ik}^{(r-1)} - l_i^{(r)} a_{r,k}^{(r-1)} \quad \text{für } i = r+1(1)n, k = r(1)m$ $b_i^{(r)} = b_i^{(r-1)} - l_i^{(r)} b_r^{(r-1)} \quad \text{für } i = r+1(1)n \quad \text{mit } l_i^{(r)} = \frac{a_{ir}^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}}$ $a_{ik}^{(r)} = a_{ik}^{(r-1)}, \quad b_i^{(r)} = b_i^{(r-1)} \quad \text{sonst}$
LU-Zerlegung:	$A = L \cdot R \text{ mit } r_{ij} = a_{ij}^{(r)} \text{ und } l_{ij} = \begin{cases} l_j^{(i)} & \text{für } i > j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$
Lösung per LU Zerlegung:	$Ly = b, Ux = y \rightarrow Ax = LUx = Ly = b$
Cholesky:	<p>Zerlege positiv semidefinites $A = R^T R$</p> $r_{11} = \sqrt{a_{11}} \text{ und } r_{1k} = \frac{a_{1k}}{r_{11}} \text{ für } k > 1$ $r_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} r_{li}^2}, \quad r_{ik} = \frac{1}{r_{ii}} \left(a_{ik} - \sum_{l=1}^{i-1} r_{li} r_{lk} \right), \text{ für } k > i$
Horner Schema:	<p>Auswerten eines Polynoms: $\sum_{i=0}^n c_i x^i = c_0 + x(c_1 + x(c_2 + x(\dots(c_{n-1} + xc_n))))$</p>
Linearer Spline:	$P_1(x) = \frac{(x_{i+1}-x)y_i + (x-x_i)y_{i+1}}{x_{i+1}-x_i} \quad x_i \leq x < x_{i+1}$
Kubischer Spline:	$P_3(x) = y_i + m(x-x_i) + \frac{1}{2}M_i(x-x_i)^2 + \frac{1}{6}\alpha_i(x-x_i)^3 \quad \text{für } x_i \leq x < x_{i+1}$ $\alpha_i = \frac{M_{i+1}-M_i}{x_{i+1}-x_i} \text{ für } i = 0(1)n-2$ $m_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} - \frac{1}{6}(x_{i+1}-x_i)(2M_i+M_{i+1}) \text{ für } i = 0(1)n-2$ <p>natürlich:</p> $\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_3''(x_0) \\ 6S_1 \\ \vdots \\ 6S_{n-2} \\ P_3''(x_{n-1}) \end{pmatrix}$ <p>mit $\lambda_i = \frac{x_{i+1}-x_i}{x_{i+1}-x_{i-1}}, \mu_i = \frac{x_i-x_{i-1}}{x_{i+1}-x_{i-1}}$ und $S_i = \frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}$.</p> <p>periodisch: die inneren Zeilen periodisch fortsetzen</p>
Nevill-Aitken-Schema:	<p>Auswerten des interpolierenden Polynoms $P_{0,n}(x)$ durch (x_i, y_i) an der Stelle x</p> $P_{i,1}(x) = y_i, \quad i = 0(1)n-1, \quad P_{i,k}(x) = \frac{P_{i,k-1}(x)(x_{i+k-1}-x) + P_{i+1,k-1}(x)(x-x_i)}{x_{i+k-1}-x_i}$
Chebyshev-Stützstellen	$x_{k,n} = \cos \frac{2k+1}{2n} \pi$
Fourierreihe:	$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}_n \exp(in\omega t) \quad \text{mit } \hat{f}_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-in\omega t) dt, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$ $\left(\frac{df}{dt} \right)_n = in\omega \hat{f}_n$
DFT:	$\text{DFT}(f_k)_n = g_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \exp(-i \frac{2\pi}{N} nk),$ $\text{iDFT}(g_n)_k = f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{g_n}{N} \exp(i \frac{2\pi}{N} nk)$
Faltung:	$(f \star g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \text{ oder}$ <p>im Fourierraum $(\widehat{f \star g})_k = \sqrt{2\pi} \hat{f}_k \hat{g}_k$</p>
Schätzer	<p>Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$, Varianz $\sigma^2 \approx \frac{N}{N-1} (x^2 - \bar{x}^2)$</p> <p>quadratischer Fehler: σ^2 / \sqrt{N}</p>
Autokorrelation:	$C_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)d\tau, \text{ diskret: } C_f(k\Delta) \approx \frac{1}{N-k} \sum_{l=0}^{N-k} f(l\Delta)f((l+k)\Delta)$
Newtonverfahren:	<p>Approximation durch Tangente $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, lokal quadratisch konvergent</p>
Sekantenverfahren:	<p>Approximation durch Sekante $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$</p>
Bisektion:	<p>$f \in C([a,b])$ und $f(a)f(b) < 0 \rightarrow m_n = \frac{a_n+b_n}{2}$</p> <p>wenn $\begin{cases} f(m_n)f(a_n) < 0 & \rightarrow b_{n+1} = m_n \\ f(m_n)f(b_n) < 0 & \rightarrow a_{n+1} = m_n \end{cases}$ bis $b_{n+1} - a_{n+1} < \text{Toleranz}$</p> <p>linear konvergent</p>
MC Integration:	$\int_{x \in V} f(x)dx \approx \frac{ V }{N} \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \quad \text{mit } \xi_i \text{ gleichverteilte Zufallsvektoren in } V$
zus. Trapezregel:	$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_{i+1}-x_i}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1}))$ $= h \left(\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + \frac{f(x_N)}{2} \right) \text{ äquidistant, also mit } h = \frac{b-a}{N} \text{ und } x_i = a + h \cdot i$
zus. Mittelpunktsregel:	$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \text{ äquidistant, also mit } h = \frac{b-a}{N} \text{ und } x_i = a + h(i + \frac{1}{2})$
finite Differenzen:	$f'(x_i) \approx \begin{cases} \frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1}))}{2h} = f'(x_i) + \mathcal{O}(h^2) \text{ zentrale Differenz} \\ \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h} = f'(x_i) + \mathcal{O}(h) \text{ linke Differenz} \\ \frac{f(x_i)-f(x_{i-1}))}{h} = f'(x_i) + \mathcal{O}(h) \text{ rechte Differenz} \end{cases}$ $f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1}))}{h^2}$

Zufallsgenerator LCG	$x_{i+1} = (ax_i + b) \bmod m$
c rand:	$m = 2^{31}$ $a = 1.103.515.245$ und $b = 12.345$ bzw. $m = 2^{48}$, $a = 25.214.903.917$ und $b = 11$
MinStd:	$m = 2^{31} - 1$ $a = 16807$ $b = 0$
Verzögerter Fibonacci:	$x_n = (x_{n-a} + x_{n-b}) \bmod m$, $a = 250$ $b = 103$ (Stoll Kirkpatrick), $a = 521$ $b = 168$
Verwerfungsmethode:	Ziehen von ZZ gemäß einer beliebigen beschränkten Verteilung $\rho(p) \leq \rho_{\max}$ auf V : ziehe p gleichverteilt aus V und u gleichverteilt auf $[0, \rho_{\max}]$ akzeptiere p , wenn $u \leq \rho(p)$
Box-Muller-Verfahren:	Erzeugen von normalverteilten Zufallszahlen z, z' aus Standardzufallszahlen durch Inversion ziehe u und u' gleichverteilt auf $[0,1]$ $\implies \begin{cases} z = \sqrt{-2 \ln(u)} \cos(2\pi u') \\ z' = \sqrt{-2 \ln(u)} \sin(2\pi u') \end{cases}$
Qualitätsanalyse	Mittelwerttest: B Blöcke der Größe k : $X_i := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{j+(i-1)k} \implies \langle X_i \rangle = \frac{1}{2}$ bzw. $X_i \approx \frac{1}{2}$ für große k χ^2 -Test: Binnen der Daten in M Bins mit Grenzen $b_i \implies$ W-keit aus Bin i zu ziehen ist $P_i = b_{i+1} - b_i$ $\implies \chi^2 = \sum_{i=1}^M \frac{(N_i - NP_i)^2}{NP_i}$ misst, ob wirklich gleichverteilt in $[0,1]$ Varianztest: $\frac{B}{B-1} \left(\overline{(X_i - \bar{X}_i)^2} \right) \approx \frac{1}{\sqrt{12k}}$ Poincaré-Schnitte: Auftragen von x_i, x_{i+1}, x_{i+2} in Würfel, um Korrelationen an Ebenenbildung zu erkennen Fourierstest: 0-Amplitude der Fouriertransformierten $\approx N/2$, alle anderen ≈ 0 Autokorrelationstest: Eine Zufallsreihe ist δ -korreliert
Random Walk	Zufällige Schritte $\pm 1 \implies$ Verteilung nach t Schritten $\rho(x,t) = \rho(x_t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x_t^2}{2\sigma^2}\right)$
Jacobi-Verfahren	LDU-Zerlegung: $x^{(i+1)} = (I - D^{-1}A)x^{(i)} + D^{-1}b = -D^{-1}(L+U)x^{(i)} + D^{-1}b$, $x_j^{(i+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{k \neq j} a_{jk} x_k^{(i)} \right)$
Gauß-Seidel-Verfahren / SOR	$x_j^{(i+1)} = \frac{\omega}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} x_k^{(i+1)} - \sum_{k=j+1}^n a_{jk} x_k^{(i)} \right) + (1-\omega)x_j^{(i)}$, $\omega = 1$ ist Gauß-Seidel
Gram-Schmidt-Verfahren:	$A = QR$ mit $q_1 = \frac{a_1}{\ a_1\ }$, $q_k = \frac{a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k, q_i) q_i}{\ a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k, q_i) q_i\ }$, $r_{ik} = \begin{cases} (a_k, q_i) \text{ falls } i < k \\ \ a_k - \sum_{i=1}^{k-1} (a_k, q_i) q_i\ \text{ falls } i = k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$
Givensrotation:	Drehen eines Matricelements auf Null durch $G_{i,k,\phi} = \begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & & s & 0 \\ \vdots & 0 & I & 0 & \vdots \\ 0 & -s & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I \end{pmatrix}$ mit $r' = \sqrt{1 + (y/x)^2}$ $c = \text{sgn}(x) \frac{1}{r'}$, und $s = \frac{y}{ x r'}$
QR-Algorithmus:	$A^{(k)} = Q^{(k)} R^{(k)}$, $A^{(k+1)} = R^{(k)} Q^{(k)} = (Q^{(k)})^H A^{(k)} Q^{(k)}$ konvergiert, Eigenwerte von $A^{(0)}$ auf der Diagonalen
Inverse Iteration:	Eigenvektor zu approx. Eigenwert λ : $(A - \lambda I) \tilde{x}^{(i+1)} = x^{(i)}$, $x^{(i+1)} = \frac{\tilde{x}^{(i+1)}}{\ \tilde{x}^{(i+1)}\ _2}$
Steepest descent:	Minimieren durch $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda \nabla f(x^{(k)})$, $\lambda > 0$, aber klein
Armijo-Schrittweiten:	Gesicherter Abstieg durch $f(x + \lambda d) \leq f(x) + \alpha \lambda \nabla f(x)^T d$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$
Simplex-Normalform	$\min(c^T x)$ unter NB $x \geq 0$, $Ax = b$
Runge-Kutta:	Numerische Lösung von DGL 1. Ordnung $\frac{dy}{dt}(t) = F(t, y(t))$, $y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^s b_j k_j$, mit $k_j = F\left(t + hc_j, y_n + h \sum_{k=1}^s a_{jk} k_k\right)$. Explizit Verfahren, wenn k_j aus k_k , $k < j$ zu berechnen
Butcher-Tableaus:	Euler explizit $\begin{array}{c c} 0 & \\ \hline 1/2 & 1/2 \\ \hline 1/2 & 0 \quad 1/2 \\ \hline 1 & 0 \quad 0 \quad 1 \end{array}$, Euler implizit $\begin{array}{c c} 1 & \\ \hline 1 & 1 \end{array}$, Runge-Kutta $\begin{array}{c ccc} 0 & & & \\ \hline 1/2 & 1/2 & & \\ \hline 1/2 & 0 & 1/2 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$
Verlocity-Verlet:	$\ddot{x}(t) = F[t, x(t)]$, $x_n \approx x(t_n)$, äquidistant mit Schrittweite h $v_{n+1/2} = v_n + \frac{h}{2} F(t_n, x_n)$ $x_{n+1} = x_n + h v_{n+1/2}$ $v_{n+1} = v_{n+1/2} + \frac{h}{2} F(t_{n+1}, x_{n+1})$