Übungsblatt 1
Theoretische Physik III: Elektrodynamik
SS 2014

Fakultät Mathematik und Physik, Universität Stuttgart
Prof. Dr. Dr. R. Hilfer
A. Lemmer (andreas.lemmer@icp.uni-stuttgart.de)

Aufgabe 1 (Votieraufgabe) **4 Punkte**

Leiten Sie die folgenden Beziehungen her:

1. Gradient eines Skalarprodukts:
$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}) + \mathbf{a}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b}) \tag{1}$$

2. Divergenz eines Vektorprodukts:
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{b}) \tag{2}$$

3. Rotation eines Vektorprodukts:
$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{a} - \mathbf{b}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}) - (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{b} + \mathbf{a}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{b}) \tag{3}$$

4. Laplace-Operator:
$$\Delta\mathbf{a} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{a}) - \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{a}) \tag{4}$$
mit $\Delta := \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$.

Aufgabe 2 (Votieraufgabe) **3 Punkte**

Die zeitabhängigen Vektorfelder $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ erfüllen die Gleichung
$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}. \tag{5}$$
Zeigen Sie: Wenn $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{r}$ zu einem Zeitpunkt $t = t_0$, dann gilt
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} \equiv 0 \tag{6}$$
zu allen Zeiten t.

Aufgabe 3 (Hausaufgabe) **8 Punkte**

Zur mathematischen Beschreibung von Punktteilchen (Punktladungen, -massen) verwendet man die sog. Dirac'sche δ-Funktion $\delta(x)$. Sie ist keine Funktion im gewöhnlichen Sinne, sondern eine verallgemeinerte Funktion (Distribution).

(a) Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und eine Folge glatter Funktionen $\delta_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ für $n \in \mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = 0 \text{ für } x \neq 0 \tag{1a}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_n(x)\mathrm{d}x = 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \tag{1b}$$

$$\begin{aligned} &f(x)\delta_n(x), n \in \mathbb{N} \text{ ist integrierbar und für jedes } s > 0 \\ &\text{gibt es integrierbare Funktionen } g : \mathbb{R}\backslash(-s, s) \to [0, \infty) \\ &\text{mit } |f(x)\delta_n(x)| \leq g(x) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1c}$$

Zeigen Sie,

(1) dass die Funktionenfolgen

$$\delta_{1,n}(x) := n \exp(-\pi n^2 x^2) \text{ und} \tag{2a}$$

$$\delta_{2,n}(x) := \frac{n}{\pi(n^2x^2 + 1)} \tag{2b}$$

die Eigenschaften (1a) und (1b) erfüllen. Skizzieren Sie $\delta_{1,n}$ und $\delta_{2,n}$ als Funktionen von x und diskutieren Sie die Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$. Welche der Funktionenfolgen erfüllen die Eigenschaft (1c) für $f(x) := x^2$?

(2) dass aus den Eigenschaften (1a) – (1c)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\delta_n(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} f(0) & , 0 \in (a, b) \\ 0 & , 0 \notin [a, b] \end{cases} \tag{3}$$

folgt. Insbesondere kommt es also *nicht* auf die konkrete Wahl der δ_n an. Beachten Sie, dass die Fälle $a = 0$ und $b = 0$ unbestimmt bleiben.
Hinweis: Eigenschaft (1c) stellt sicher, dass der Grenzübergang $n \to \infty$ und eine Integration über $[a, b]\backslash(-s, s)$ vertauscht werden dürfen.

(b) Die Dirac'sche δ-"Funktion" wird durch den symbolischen Grenzübergang "$\delta(x) := \lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(x)$" definiert, der so zu verstehen ist, dass er *nach* einer Integration bzgl. x zu vollziehen ist (vgl. (3)):

$$\int_a^b f(x)\delta(x-y)\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\delta_n(x-y)\mathrm{d}x = \begin{cases} f(y) & , y \in (a,b) \\ 0 & , y \notin [a,b] \end{cases} \tag{4}$$

Das Integral in Gl. (4) ist ein lineares Funktional von f und wird δ-Distribution genannt.
Zeigen Sie:

(1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta(x-y) = \delta(x-y),$$

wobei Θ die Heavyside-Funktion

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

ist.

(2)

$$\delta(h(x)) = \sum_k \frac{\delta(x-x_k)}{|h'(x_k)|},$$

wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit einfachen Nullstellen x_k ist, d.h. $h(x_k) = 0$ und $h'(x_k) \neq 0$.

(3)

$$f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x) = -\delta(x)f'(x).$$

(4)

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \exp(\pm iqx)\mathrm{d}q.$$

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $f(x)$ eine Fourier-Transformierte besitzt.