

Makroskopische Hydrodynamik: Finite Volumen Methoden für hyperbolische Probleme

Peter-Simon Dieterich

Universität Stuttgart

Hauptseminar Moderne Simulationsmethoden in der Physik WS

09/10

17. Februar 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Partielle Differentialgleichungen	2
3	Erhaltungssätze	3
4	Hyperbolische partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung	7
5	Finite-Volumen-Methode	10

1 Einführung

Wir möchten in diesem Vortrag eine finite Volumen Methode für Erhaltungssätze untersuchen. In den folgenden Kapiteln soll zunächst eine Übersicht über partielle Differentialgleichungen gegeben und die Grundlagen für hyperbolische Systeme von Erhaltungssätzen, wie zum Beispiel Lösungsansätze für lineare Probleme, erklärt werden. Im Anschluss werden wir mithilfe dieser Techniken die Godunov-Methode konstruieren.

2 Partielle Differentialgleichungen

Unter einer partiellen Differentialgleichung verstehen wir eine Differentialgleichung (bzw. ein System von partiellen Differentialgleichungen), die mindestens zwei partielle Ableitungen enthält.

Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen existiert keine einheitliche Theorie zu partiellen Differentialgleichungen. Im Regelfall müssen die verschiedenen Typen mittels unterschiedlicher Techniken untersucht werden, um Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit sowie weitere Eigenschaften von Lösungen erhalten zu können.

Man unterscheidet grob zwischen drei Typen von partiellen Differentialgleichungen. Diese sollen anhand von drei Modellbeispielen skizziert werden.

Beispiel 1. Die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0$$

ist eine partielle Differentialgleichung mit einer unbekanntem Funktion $u : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Sie findet beispielsweise Anwendungen in der Modellierung von Potentialen eines rotationsfreien Flusses einer inkompressiblen Flüssigkeit, eines stationären elektrischen Feldes im ladungsfreien Raum Ω oder eines stationären Temperaturfeldes. Durch Vorgabe von Randbedingungen, zum Beispiel Dirichlet oder von Neumann, lassen sich Existenz und Eindeutigkeitsaussagen treffen. Die Laplace-Gleichung ist ein Beispiel für eine **elliptische** partielle Differentialgleichung. Elliptische Gleichungen treten häufig als stationärer Grenzfall dynamischer Systeme auf und beschreiben Zustände minimaler Energie. Die Herleitung basiert meistens auf einem Variationsproblem.

Beispiel 2. Die Wärmeleitungsgleichung oder Diffusionsgleichung

$$\partial_t u = \Delta u$$

mit $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibt beispielsweise die Temperaturverteilung eines Körpers durch Wärmeleitung oder die Diffusion eines gelösten Stoffes. Sie ist eine **parabolische** partielle Differentialgleichung und beschreibt ähnliche Phänomene wie elliptische Gleichungen jedoch im instationären Fall. Für die Diffusionsgleichung lässt sich zeigen, dass

sie glättend ist, d.h.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\partial_x u(x, t)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, 0)|$$

und somit strebt u gegen eine konstante Funktion für $t \rightarrow \infty$, falls die Anfangsbedingung $u(x, 0)$ beschränkt ist.

Beispiel 3. Die Wellengleichung

$$\partial_t^2 q = \Delta q$$

mit $q : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibt beispielsweise die Oszillationen einer Saite oder Membran, die Lichtausbreitung im Vakuum oder Oberflächenwellen. Die Wellengleichung ist ein Beispiel für **hyperbolische** partielle Differentialgleichungen. Diese beschreiben im Allgemeinen Wellen und deren Ausbreitung, da sich bei hyperbolischen partiellen Differentialgleichungen Informationen nur mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten können. Eine weitere Eigenschaft hyperbolischer partieller Differentialgleichungen ist, dass sich aus stetigen Anfangswerten Unstetigkeiten (Schocks) in der Lösung nach endlicher Zeit entwickeln können.

Die obigen Beispiele möchten vermuten lassen, dass sich partielle Differentialgleichungen in drei Klassen einteilen lassen können. Dies ist jedoch nicht möglich. Eine allgemeine Definition von elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Systemen würde eine große Anzahl interessanter Gleichungen ausschließen. Für Systeme erster und zweiter Ordnung ist es allerdings möglich, eine solche Definition zu geben.

3 Erhaltungssätze

Die Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik basieren auf Erhaltungsprinzipien für Masse, Impuls, Drehimpuls und Energie. Wir möchten im Folgenden die Erhaltungssätze für Masse und Impuls formulieren und anschließend eine allgemeine Definition für Systeme von Erhaltungssätzen in einer Raumdimension geben.

Sei Ω die Referenzkonfiguration eines Körpers zur Zeit $t = 0$ und sei $\Omega_t = \{x(t, X) | X \in \Omega\}$ die Konfiguration des Körpers zur Zeit t . Dabei beschreibt die bijektive und hinreichend glatte Abbildung $x(X, t)$ die Bewegung eines Materialpunktes $X \in \Omega$. Das Geschwindigkeitsfeld am (räumlichen) Punkt $x(X, t)$ ist definiert als

$$v(x, t) = \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Die Bezeichnungen X und x beschreiben zwei verschiedene Typen von Koordinaten:

- *Materielle* oder *Lagrangesche* Koordinaten X : Es wird ein Materiepunkt betrachtet und dessen Bewegung verfolgt. Man beschreibt beispielsweise Deformationen von Festkörpern in diesen Koordinaten

- Eulersche Koordinaten x : Man betrachtet einen festen Punkt im Raum und verfolgt beispielsweise die Geschwindigkeit der Materiepunkte die diesen Punkt passieren.

Wir wollen unsere Erhaltungssätze in Eulerschen Koordinaten beschreiben.

3.1 Massenerhaltung

Die Mengen Ω_t enthalten für alle Zeiten t dieselben Massenpunkte. Wir beschreiben daher unsere Massenerhaltung durch

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varrho(x, t) dx = 0,$$

dabei bezeichne $\varrho(x, t)$ die Massendichte in Eulerschen Koordinaten. Wir können die zeitliche Ableitung mithilfe des Reynoldsschen Transporttheorems in das Integral ziehen. Wir erhalten

$$\int_{\Omega_t} \partial_t \varrho dx + \int_{\partial\Omega_t} \varrho(v \cdot n) dx = 0,$$

wobei n das Normalenfeld des Rands $\partial\Omega_t$ bezeichne. Wir sehen anhand dieser Gleichung, dass sich die Masse in dem Volumen Ω_t nur durch Flüsse der Masse über den Rand ändern kann.

Da die Gleichung für alle Teilvolumen eines gegebenen Volumens gelten muss, erhalten wir (sofern ϱ und v glatt genug sind) die differentielle Form des Erhaltungssatzes

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho v) = 0.$$

3.2 Impulserhaltung

Zur Formulierung der Impulserhaltung gehen wir für die Impulsdichte $\varrho(x, t)v(x, t)$ analog wie bei der Massenerhaltung vor. Die Impulsdichte soll sich nur durch innere Kräfte (Scherkräfte, Viskosität, usw.) oder durch externe Kräfte ändern

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varrho v dx = \int_{\Omega_t} \varrho f dx + \int_{\partial\Omega_t} \operatorname{div} \sigma dx.$$

Hier bezeichnet σ den Cauchy'schen Spannungstensor und f die massenbezogene Kraftdichte. Anwendung des Reynoldsschen Transporttheorems liefert

$$\int_{\Omega_t} \varrho(\partial_t v + (v \cdot \nabla)v) - \operatorname{div} \sigma - \varrho f dx = 0.$$

Die differentielle Form lautet (auch hier für hinreichend glatte ϱ, v, σ)

$$\varrho(\partial_t v + (v \cdot \nabla)v) = \operatorname{div} \sigma + \varrho f.$$

3.3 Eindimensionale Erhaltungssätze

Wir beschränken uns nun auf eine Raumdimension.

Definition 4. Sei Ω eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^m und sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ glatt. Dann nennen wir das System der m Gleichungen

$$\partial_t q(x, t) + \partial_x f(q(x, t)) = 0,$$

wobei $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega$, *System von Erhaltungssätzen*. Man nennt f *Flussfunktion*, q *Erhaltungsgröße* und Ω die *Zustandsmenge*.

Mit der Jacobi-Matrix $A(x) = Df(x)$, $x \in \Omega$ folgt mit der Kettenregel

$$\partial_t q + A(q)\partial_x q = 0.$$

Gleichungen dieses Typs nennt man *quasilinear*, da die Koeffizienten nur von q und nicht von Ableitungen von q abhängen.

Eine Integration über das Intervall $I = [x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} \int_I q(x, t) dx = -f(q(x, t))|_I$$

veranschaulicht die Erhaltung der Größe q . Wenn wir annehmen, dass $\lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x, t) = 0$ und $f(0) = 0$, dann liefert eine Integration über das Zeitintervall $[0, t]$ und $I = \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} q(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}} q(x, 0) dx.$$

Das heißt, die „Gesamtmasse“ der Größe q ändert sich nicht mit der Zeit.

3.4 Methode der Charakteristiken

Mithilfe der Methode der Charakteristiken lassen sich eine große Klasse von linearen und quasilinearen partiellen Differentialgleichungen lösen. Anhand des Beispiels der Advektionsgleichung soll die Methode illustriert werden.

Wir betrachten die Advektionsgleichung

$$\partial_t q + c\partial_x q = 0$$

mit der Anfangsbedingung $q(x, 0) = f(x)$ für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Gleichung beschreibt beispielsweise die Konzentration q eines Stoffes in einer Flüssigkeit in einem eindimensionalen Rohr mit konstanter Geschwindigkeit c .

Die Idee der Methode der Charakteristiken besteht darin, eine Familie von Kurven in der (x, t) -Ebene zu finden, entlang derer sich die Lösung möglichst einfach verhält. Sei also $t \mapsto x(t)$ eine solche Kurve und u eine Lösung der Advektionsgleichung. Dann folgt mit der Kettenregel

$$\frac{du(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt}.$$

Erfüllt nun die Kurve $x(t)$ die Bedingung

$$\frac{dx(t)}{dt} = c,$$

dann folgt aus der partiellen Differentialgleichung für u , dass

$$\frac{du(x(t), t)}{dt} = 0.$$

Als Resultat erhalten wir also, dass eine Lösung der Differentialgleichung konstant ist entlang Kurven $x(t) = ct + x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, den sogenannten *Charakteristiken*, das heißt

$$u(ct + x_0, t) = u(x_0, 0) = f(x_0).$$

Umformulieren dieses Ausdrucks liefert die allgemeine Lösung der Advektionsgleichung

$$u(x, t) = f(x_0 - ct).$$

3.5 Unviskose Burgersgleichung

Die (unviskose) Burgersgleichung

$$\partial_t q + q \partial_x q = 0$$

ist ein weiteres Beispiel für einen Erhaltungssatz. Sie ist der Grenzfall verschwindender Viskosität der viskosen Burgersgleichung

$$\partial_t q + q \partial_x q = \mu \partial_x^2 q.$$

Mit ihr kann man das Geschwindigkeitsfeld eines unviskosen kompressiblen eindimensionalen Fluids oder Gases modellieren. Durch die Methode der Charakteristiken erhalten wir die Lösung des Anfangswertproblems implizit durch

$$q(x(t), t) = f(x_0), \quad x(t) = x_0 - f(x_0)t.$$

Mit dem Satz über implizite Funktionen (lösen der Gleichungen nach x_0) erhalten wir Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für kleine Zeiten.

Wenn wir zu der Anfangsbedingung

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

die Charakteristiken betrachten (vgl. Abbildung 1), so stellen wir fest, dass sich die Charakteristiken schneiden. Wenn wir uns daran erinnern, dass die Lösung aber entlang der charakteristischen Kurven konstant ist, so treffen am Schnittpunkt verschiedene Funktionswerte aufeinander, die Lösung ist an dieser Stelle nicht mehr stetig.

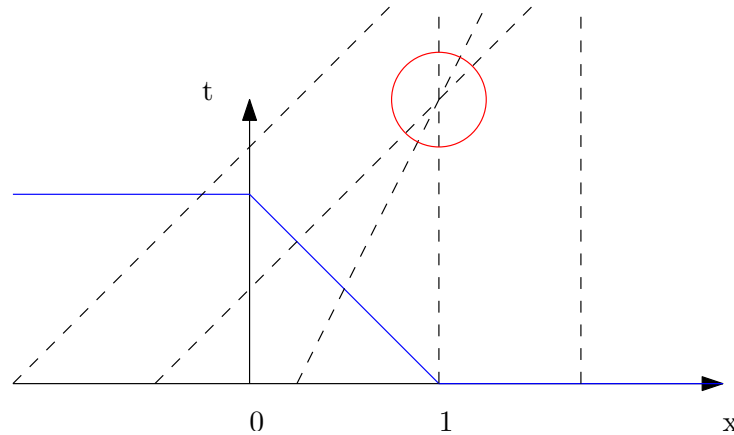


Abbildung 1: Schnitt von Charakteristiken

Das Auftreten einer Unstetigkeit in der Lösung kann mit der Vernachlässigung der Viskosität erklärt werden. Ähnlich wie bei der Diffusionsgleichung hat die zweite Ableitung im Ort eine glättende Wirkung, die das Auftreten der Unstetigkeitsstellen (auch Schocks genannt) verhindert.

4 Hyperbolische partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

In diesem Abschnitt untersuchen wir hyperbolische Systeme von Erhaltungssätzen mit speziellen Anfangsbedingungen und lösen diese im linearen Fall.

Definition 5. Das System

$$\partial_t q + \partial_x f(q) = 0$$

heißt *hyperbolisch* in $x \in \Omega$, wenn die Jacobi-Matrix $A(x) = Df(x)$ diagonalisierbar ist und nur reelle Eigenwerte besitzt.

Das System heißt hyperbolisch, wenn es für alle $x \in \Omega$ hyperbolisch ist.

4.1 Lösung des linearen Cauchy-Problems

Das *Cauchy-Problem* lautet:

Finde $q(x, t)$, so dass q das hyperbolische System

$$\partial_t q + \partial_x f(q) = 0$$

löst und die Anfangsbedingung

$$q(x, 0) = q_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

erfüllt, wobei $q_0 : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ eine gegebene Funktion ist.

Sei nun A die Jacobi Matrix. Wir haben bereits gesehen, dass sich das System als

$$\partial_t q + A \partial_x q = 0$$

schreiben lässt. Da das System hyperbolisch ist, finden wir eine Matrix $T = (v^1, \dots, v^m)$ aus Eigenvektoren v^p zum Eigenwert λ_p , so dass $T^{-1}AT = \Lambda$ mit $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Ein Koordinatensystemwechsel $w = T^{-1}q$ reduziert unser System auf m unabhängige Gleichungen

$$\partial_t w_p + \lambda_p \partial_x w_p = 0, \quad p = 1, \dots, m$$

mit den von der Advektionsgleichung bekannten Lösungen

$$w^p(x, t) = w^p(x - \lambda_p t, 0) w_0^p(x - \lambda_p t),$$

wobei $w_0(x) = T^{-1}q_0(x)$.

Somit erhalten wir als Lösung eine Superposition von m Wellen mit Ausbreitungsgeschwindigkeit λ_p

$$q(x, t) = \sum_{p=1}^m w^p(x, t) v^p.$$

Man nennt die Funktionen $w^p(x, t)$ *charakteristische Variablen* und die Kurven $x(t) = x_0 + \lambda_p t$ heißen *p-Charakteristiken*.

4.2 Lösung des linearen Riemann-Problems

Wir haben bisher angenommen, dass q_0 bzw. q hinreichend glatt sind. Wenn wir q_0 als nicht differenzierbar wählen, dann ist die Funktion

$$q(x, t) = \sum_{p=1}^m w^p(x, t) v^p$$

keine Lösung mehr im klassischen Sinne, da sie Stellen enthält an denen sie nicht differenzierbar ist und somit die Differentialgleichung nicht erfüllt. Um dieses Problem zu beheben führt man die Differentialgleichung in eine Integralgleichung über, so dass die Gleichung nicht mehr punktweise gilt. Im hyperbolischen Fall haben wir aber bereits eine Integralgleichung (vgl. Abschnitt 3.3). Durch das Aufgeben der punktweisen Gültigkeit der Gleichung kann es zum Verlust der Eindeutigkeit kommen. Es sind dann weitere mathematische Überlegungen notwendig, um den Begriff der Eindeutigkeit weiter zu klären. Da dieses Gebiet sehr umfangreich ist, wird nicht weiter darauf eingegangen. Wir können im Folgenden aber annehmen, dass die gefundenen Lösungen, die physikalisch Sinnvollen sind.

Weiter stellen wir fest, dass sich Singularitäten (d.h. Punkte, an denen die Ableitung unbeschränkt wird) nur entlang Charakteristiken ausbreiten können. Denn angenommen die Anfangsbedingung q_0 ist in einer Umgebung des Punktes (X, T) im Phasenraum glatt, dann muss die Lösung $q(x, t)$ in einer Umgebung des Punktes (X, T) auch glatt sein.

Das *Riemann-Problem* besteht aus einem linearen hyperbolischen System von Erhaltungssätzen zusammen mit der Anfangsbedingung

$$q_0(x) = \begin{cases} q_l & \text{wenn } x < 0 \\ q_r & \text{wenn } x > 0, \end{cases}$$

für $q_l, q_r \in \mathbb{R}$, $q_l \neq q_r$.

Wir stellen nun q_l und q_r in der Basis der Eigenvektoren von A dar, also

$$q_l = \sum_{p=1}^m w_l^p r^p \quad \text{und} \quad q_r = \sum_{p=1}^m w_r^p r^p.$$

Dann ist

$$w^p(x, t) = w_0^p(x - \lambda_p t) = \begin{cases} w_l^p & \text{wenn } x - \lambda_p t < 0, \\ w_r^p & \text{wenn } x - \lambda_p t > 0, \end{cases}$$

und wir können nun unsere Lösung q schreiben als

$$q(x, t) = \sum_{p=1}^m w^p(x, t) v^p = \sum_{p: \lambda_p < x/t} w_r^p v^p + \sum_{p: \lambda_p > x/t} w_l^p v^p.$$

Die Bestimmung von $q(x, t)$ an einem Punkt (X, T) ist in Abbildung 2 illustriert. Die Lösung ist in den von den Charakteristiken berandeten Keilen konstant. Der Sprung an der p -ten Charakteristik beträgt gerade

$$\mathcal{W}^p := \alpha_p r^p := (w_r^p - w_l^p) v^p.$$

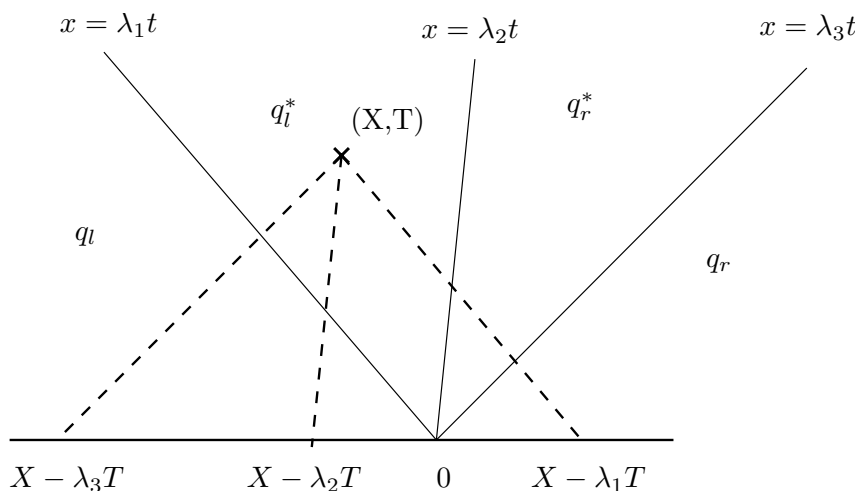


Abbildung 2: Konstruktion der Lösung des Riemann-Problems bei (X, T) . Ausgehend von (X, T) geht man entlang der p-ten Charakteristik zurück, um w^p zu bestimmen.

Wir lösen also das lineare Gleichungssystem

$$R\alpha = q_r - q_l$$

und erhalten schließlich unsere Lösung zu

$$q(x, t) = q_l + \sum_{p: \lambda_p < x/t} \mathcal{W}^p = q_l + \sum_{p=1}^m H(x - \lambda^p t) \mathcal{W}^p$$

oder äquivalent

$$q(x, t) = q_r - \sum_{p=1}^m H(\lambda^p t - x) \mathcal{W}^p.$$

5 Finite-Volumen-Methode

Eine Finite-Volumen-Methode ist ein numerisches Verfahren zur Approximation von Lösungen von Erhaltungsgleichungen. Dazu zerlegen wir unser räumliches Gebiet in Intervalle $\mathcal{C}_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, die sogenannten *Gitterzellen* bzw. *finiten Volumen*.

Finite-Volumen-Methoden nähern nun die Zellmittelwerte

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathcal{C}_i} q(x, t_n) dx$$

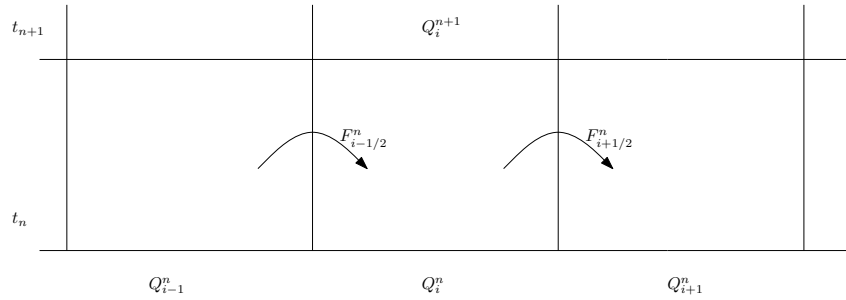


Abbildung 3: Veranschaulichung der finiten Volumen Methode

anstatt der gesuchten Funktion q . Für glatte q stimmen die Zellmittelwerte mit dem Funktionswert in der Mitte des Intervalls mit der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ überein.

Die integrale Form des Erhaltungssatzes hat die Form

$$\int_{\mathcal{C}_i} \partial_t q(x, t) dx = f(q(x_{i-1/2}, t)) - f(q(x_{i+1/2}, t)).$$

Eine Diskretisierung der Zeit in Intervalle und Integration obiger Gleichung über ein solches Intervall liefert

$$\int_{\mathcal{C}_i} q(x, t_{n+1}) dx = \int_{\mathcal{C}_i} q(x, t_n) dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} [f(q(x_{i+1/2}, t)) - f(q(x_{i-1/2}, t))] dt.$$

Mit den Zellmittelwerten ausgedrückt erhalten wir

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n),$$

wobei

$$F_{i-1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt$$

eine Näherung des mittleren Flusses entlang $x_{i-1/2}$ ist.

Diese Formel gibt uns nun an, wie wir die Zellmittelwerte von q in jedem Zeitschritt aktualisiert werden sollen. Dies ist in Abbildung 3 veranschaulicht. Allerdings können wir die Zeitintegrale auf der rechten Seite im Allgemeinen nicht exakt bestimmen. Aufgabe von Finiten-Volumen-Methoden ist es nun, eine numerische Approximation dieser Flusintegrale $F_{i-1/2}^n$ zu liefern. Wir werden dies später am Beispiel der Godunov-Methode sehen.

Eine besondere Eigenschaft von Finiten-Volumen-Methoden ist die Konservativität. Dies sehen wir, indem wir über die Q_i^n (räumlich) summieren

$$\sum_{i=I}^J (Q_i^{n+1} - Q_i^n) = -\frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{J+1/2}^n - F_{I-1/2}^n).$$

Wir sehen, dass sich die Gesamtmasse zwischen der I -ten und der J -ten Zelle nur durch die Flüsse an den äußersten Rändern ändert, da sich die Flüsse über die inneren Zellgrenzen gerade wegheben.

5.1 CFL-Bedingung

Eine notwendige Bedingung für die Stabilität einer Finiten-Volumen-Methode ist die CFL-Bedingung, benannt nach Courant, Friedrichs und Lewy. Die Bedingung fordert, dass innerhalb eines Zeitschrittes sich Informationen nicht mehr als eine Zelle weit ausbreiten dürfen.

Veranschaulichen können wir dies mit den Charakteristiken der Advektionsgleichung in Abbildung 4. Je nach Größe des Zeitschrittes hängt die Flussfunktion von den Zellmittelwerten von unterschiedlich vielen Zellen ab. Benutzt die verwendete Methode zur Approximation der Flussintegrale jedoch nur jeweils die angrenzende Zelle, so führt dies zu Instabilitäten.

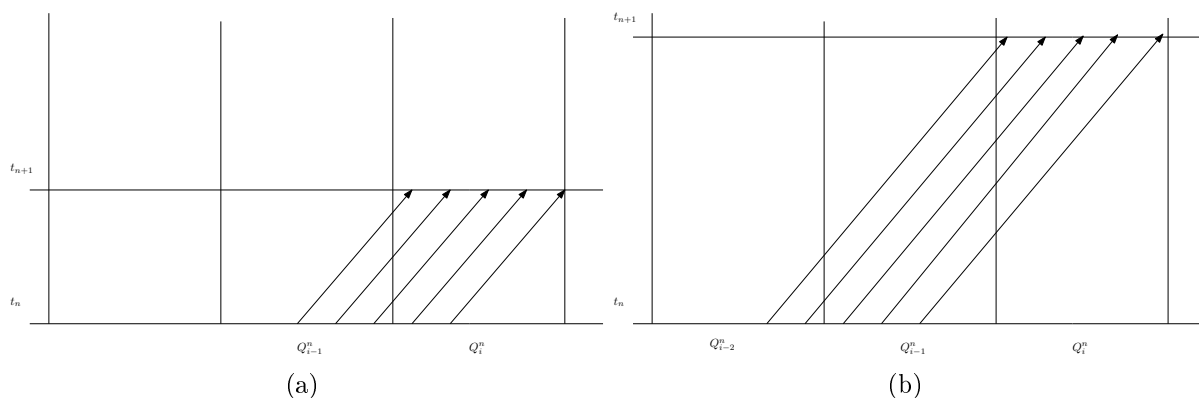


Abbildung 4: Charakteristiken der Advektionsgleichung. (a) Für ein Δt klein genug hängt die Flussfunktion zwischen den Zellen C_{i-1} und C_i nur von Q_{i-1}^n ab. (b) Ist der Zeitschritt zu groß, hängt die Flussfunktion zusätzlich noch von der Zelle Q_{i-2}^n ab

Bei hyperbolischen Differentialgleichungen sind die Ausbreitungsgeschwindigkeiten bekannt. Wir fordern daher

$$\max_{p \in \{1, \dots, m\}} |\lambda_p| \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

5.2 Godunov-Methode

Die Godunov-Methode verwendet die Lösung des Riemann Problem (bzw. deren numerische Approximation im Falle einer nichtlinearen Gleichung) um die Flussintegrale zu bestimmen. Im Folgenden wird nur der grobe Algorithmus angegeben.

1. Konstruiere eine stückweise konstante Funktion $\tilde{q}^n(x, t_n)$ über

$$\tilde{q}^n(x, t_n) = Q_i^n \quad \forall x \in \mathcal{C}_i$$

2. Löse das Riemann-Problem der hyperbolischen Gleichung mit der Funktion \tilde{q}^n als Anfangsbedingung für einen Zeitschritt.
3. Mittle über diese Funktion über jede Zelle um die neuen Zellmittelwerte zu erhalten

$$Q_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathcal{C}_i} \tilde{q}^n(x, t_{n+1}) dx.$$

4. Wiederhole diese Prozedur für den nächsten Zeitschritt.

Diese Methode lässt sich auch auf nichtlineare Probleme erweitern. Hierzu muss im Allgemeinen lediglich auf eine numerische Lösung des Riemann-Problems zurück gegriffen werden.

5.3 Vor- und Nachteile von Finiten-Volumen-Methoden

In Finiten-Volumen-Methoden muss man üblicherweise auf polygonal berandete Zellen zurückgreifen, so dass das Integral über den Rand einfach dargestellt werden kann. Man ist daher mit der Triangulierung des Gebietes auf einfache Geometrien beschränkt. Außerdem ist man in der Wahl des Zeitschritts durch die CFL-Bedingung begrenzt.

Andererseits bleibt der Rechenaufwand und Speicherbedarf gering, insbesondere wenn die Verfahren explizit sind. Daher lassen sich Finite-Volumen-Methoden auch auf große bzw. dreidimensionale Probleme anwenden. Der größte Vorteil bleibt jedoch die Konservativität, die mit Finiten-Element- bzw. Finiten-Differenzen-Methoden im Allgemeinen nicht erreicht werden kann.

Literatur

- [1] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Springer Verlag, 1996.
- [2] R. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge Univ. Press, 2007.