Probeklausur

Physik auf dem Computer SS 2013

JP Dr. Axel Arnold   Dr. Olaf Lenz   Tobias Richter
Elena Minina

22. Juli 2013

Name	
Vorname	
Matrikelnummer	

Hinweise

- In der Regel gibt der verfügbare freie Platz einen Hinweis darauf, welchen Umfang die Lösung haben sollte.
- Lies Dir *alle* Fragen am Anfang durch, bevor Du anfängst, sie zu beantworten.
- Falls der Platz nicht ausreichen sollte, verwende zusätzliche Blätter. Beschrifte diese unbedingt mit Deinem Namen und Matrikelnummer!
- Die Maximalpunktzahl ist 100.
- Zum Bestehen der Klausur sind 50 Punkte notwendig.

Viel Erfolg!

1 Lineare Algebra I (7 Punkte)

Aufgabe 1: (1 Punkt)

Nenne einen Vorteil der Spaltenpivotwahl gegenüber der kanonischen Pivotwahl bei der Gaußeliminiation einer quadratischen Matrix?

Antwort:

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Löse das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Gaußelimination mit Spaltenpivotisierung und Rücksubstitution.

$$\begin{pmatrix} 16 & 12 & 6 \\ -8 & -2 & 0 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 408 \\ -136 \\ 704 \end{pmatrix}$$

Antwort:

Aufgabe 3: (1 Punkt)
Erstelle eine reguläre (3×3)-Matrix, bei der es unmöglich ist, sie mit Hilfe der Gaußelimination mit kanonischer Pivotisierung zu diagonalisieren.

Antwort:

2 Darstellung von Funktionen (10 Punkte)

Aufgabe 4: (1 Punkt)
Welchen Vorteil hat die Polynominterpolation mit Chebyshev-Stützstellen gegenüber der Polynominterpolation mit äquidistanten Stützstellen?

Antwort:

Aufgabe 5: (5 Punkte)
Berechne mit Hilfe der Lagrangepolynome das interpolierende Polynom an den Stützstellen $-\pi, 0, \pi$ zur Funktion $f(x) = \cos x$.

Antwort:

Aufgabe 6: (3 Punkte)
Skizziere graphisch die Fouriertransformierte der Funktion $f(x) = \sin \pi x + \sin 2\pi x$. Bitte denke daran, die Achsen zu beschriften!

Antwort:

Aufgabe 7: (1 Punkt)
Nenne einen Vorteil der Splineinterpolation gegenüber der Interpolation mit Polynomen.

Antwort:

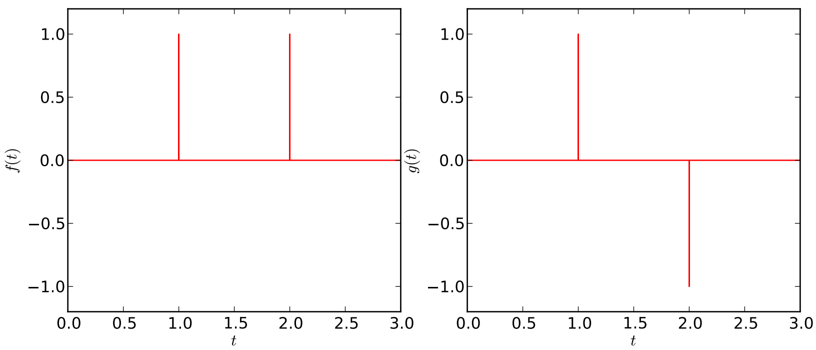
3 Signalverarbeitung (11 Punkte)

Aufgabe 8: (2 Punkte)
Nenne einen Vor- und einen Nachteil der sogenannten „Schnellen Fouriertransformation“ (FFT) gegenüber der diskreten Fouriertransformation (DFT).

Antwort:

Aufgabe 9: (3 Punkte)

Skizziere die Kreuzkorrelation der beiden in der folgenden Abbildung skizzierten Funktionen f (links) und g (rechts).



Antwort:

Aufgabe 10: (3 Punkte)

Skizziere (graphisch oder verbal) die Bedeutung der Nyquist-Frequenz eines Signals.

Antwort:

Aufgabe 11: (3 Punkte)
In einer Computersimulation misst Du alle 200 Schritte den Druck, und erhälst so $N = 50.000$ Messungen P_i, $i = 1(1)N$. Wie kannst Du aus diesen Daten den *Fehler* Deiner Messung abschätzen? Welche Annahme musst Du treffen, und wie kannst Du diese überprüfen?

Antwort:

4 Nichtlineare Gleichungssysteme (12 Punkte)

Aufgabe 12: (1 Punkt)
Welche der folgenden drei Methoden kannst Du anwenden, wenn Du die Nullstelle einer Funktion suchst, deren Ableitung Du nicht kennst?

- Newtonverfahren
- Bisektion
- Sekantenverfahren

Antwort:

Aufgabe 13: (5 Punkte)

Es sei eine Pythonfunktion `newton(f, fp, x0)` zur Nullstellensuche gegeben. Schreibe ein Stück Pythoncode, das mit Hilfe dieser (gegebenen) Funktion den Wert von $17^{\frac{1}{4}}$ berechnet und ausgibt, ohne dabei den Pythonoperator `**` zu verwenden! Verwende als Startwert $x_0 = 2$. `f` sei dabei eine mathematische Funktion, `fp` deren Ableitung, und `x0` der Startwert des Newtonverfahrens. Die Funktion `newton` muss hier *nicht* definiert werden, sondern wird als gegeben vorausgesetzt.

Antwort:

Aufgabe 14: (6 Punkte)

Berechne die Lösung der Gleichung $x^2 = e^x$ numerisch mit Hilfe eines Taschenrechners und einer der Methoden aus der Vorlesung auf zwei Nachkommastellen genau. Wie gehst Du vor? Welche Methode verwendest Du?

Antwort:

5 Numerisches Differenzieren und Integrieren (9 Punkte)

Aufgabe 15: (2 Punkte)
Welchen Vorteil haben Quasizufallszahlen bei der Monte-Carlo-Integration gegenüber Pseudozufallszahlen, und warum?

Antwort:

Aufgabe 16: (3 Punkte)
Diskretisiere die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \alpha x = g(x)$ mit Hilfe eines finite Differenzen-Schemas. Benutze für die zweite Ableitung die folgende Näherung:

$$f''(x_i) \approx \frac{1}{h^2}(f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

Beschreibe alle notwendigen Schritte, um eine Näherung für die Lösung der Differentialgleichung auf dem Interval $[0, L]$ zu berechnen. Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Gleichungssysteme können vorausgesetzt werden.

Antwort:

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Schreibe eine Pythonfunktion `trapez(f,a,b,N)`, die die zusammengesetzte Trapezregel implementiert und dadurch das Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ an N äquidistanten Stützstellen berechnet. Dabei seien a und b selbst Stützstellen.

Antwort:

6 Zufallszahlen (15 Punkte)

Aufgabe 18: (1 Punkt)
Nenne drei Methoden, um die Qualität von Zufallszahlen zu überprüfen.

Antwort:

Aufgabe 19: (4 Punkte)
Skizziere (graphisch oder verbal), wie man mit Hilfe der Verwerfungsmethode aus einer Folge von gleichverteilten Zufallszahlen eine Folge von Zufallszahlen erzeugen kann, die eine durch die Verteilungsfunktion $G(x)$ gegebene Verteilung hat.

Antwort:

Aufgabe 20: (1 Punkt)

Welchen Nachteil hat die Verwerfungsmethode gegenüber der Inversionsmethode?

Antwort:

Aufgabe 21: (4 Punkte)

Angenommen, Du möchtest die Landoberfläche der Erde mit Hilfe der Monte-Carlo-Integration bestimmen. Dazu erzeugst Du zufällige Positionen auf der Erdoberfläche, indem Du jeweils den Breiten- und den Längengrad durch gleichverteilte Zufallszahlen festlegst. Wieso wirst Du keine gute Näherung erhalten?

Antwort:

Aufgabe 22: (5 Punkte)

Nach einer durchgezechten Nacht implementiert ein Student den zweidimensionalen Randomwalk wie folgt (`randint(a,b)` liefert eine Zufallszahl zwischen a und b inklusive der Grenzen):

```
u = randint(0,3)
if u == 0: x += 1
elif u == 1: x -= 1
elif u == 3: y += 1
elif u == 4: y -= 1
```

Der Algorithmus ist fehlerhaft. Wie groß sind die mittleren Abweichungen vom Ursprung $\langle |x| \rangle$ und $\langle |y| \rangle$ nach 200 bzw. 800 Schritten? Skizziere die Graphen der mittleren Abweichungen vom Ursprung über der Anzahl Schritte.

Antwort:

7 Lineare Algebra II (7 Punkte)

Aufgabe 23: (2 Punkte)

Wird für die folgende Matrix das Jacobi-Verfahren konvergieren? Warum?

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & 8 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & -3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Antwort:

Aufgabe 24: (1 Punkt)

Zu welchem Verfahren ist das Relaxationsverfahren mit einem Dämpfungsparameter von $\omega = 1$ äquivalent?

Antwort:

Aufgabe 25: (3 Punkte)

Was tut die folgende Pythonfunktion? Welcher Algorithmus ist dabei implementiert?

```python
def f(A, N=1000):
    n = A.shape[0]
    I = numpy.identity(n)
    Ak = A.copy()
    for i in range(N):
        shift = Ak[-1,-1]
        Q, R = scipy.linalg.qr(Ak - shift*I)
        Ak = numpy.dot(R, Q) + shift*I
    lambdas = numpy.array([Ak[i,i] for i in range(n)])
    return lambdas
```

Antwort:

Aufgabe 26: (1 Punkt)

Erstelle eine L+D+U-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Antwort:

8 Optimierung (10 Punkte)

Aufgabe 27: (4 Punkte)

Gesucht ist das lokale Minimum der Funktion $f(x, y) = \cos((x+1)(y-1))$. Führe vom Ausgangspunkt $x = y = 0$ zwei Schritte des Verfahrens des steilsten Abstiegs mit Schrittweite $\lambda = 0{,}1$ aus.

Antwort:

Aufgabe 28: (3 Punkte)
Skizziere (verbal oder graphisch) die Idee des *Simulated Annealing*.

Antwort:

Aufgabe 29: (3 Punkte)
Es sei das folgende Problem in Simplex-Normalform gegeben:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^4} c^T x \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

mit $c = (1, 1, 0, 0)^T$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = (1, 1)^T$.
Wie kannst Du das Problem ohne die Variablen x_3 und x_4 kürzer (aber nicht in Simplex-Normalform) formulieren? Skizziere den zulässigen Bereich bezüglich der beiden Variablen x_1 und x_2 unter Berücksichtigung der Gleichungsbedingung.

Antwort:

9 Differentialgleichungen (9 Punkte)

Aufgabe 30: (3 Punkte)
Wenn man ein klassisches Fadenpendel als harmonischen Oszillator löst, welche der folgenden Näherungen sind numerischer und welche analytischer Natur?

- Diskretisierung der Zeit
- Reibungsfreiheit
- Rundungsfehler
- $\sin x = x$ für kleine Winkel

Antwort:

Aufgabe 31: (1 Punkt)
Es sei die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = \gamma\dot{x} + \frac{V}{2}x^2$$

gegeben. Formuliere diese Differentialgleichung als Gleichung erster Ordnung der Form

$$\dot{X} = F(X) \quad \mathrm{mit} X := (x, \dot{x})^T.$$

Antwort:

Aufgabe 32: (3 Punkte)
Gebe das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung mit Schrittweite h für eine Differentialgleichung der Form $\ddot{x} = F(x)$ explizit an. Der aktuelle Punkt sei dabei $x = x_i$ und $\dot{x}_i = v_i$.

Antwort:

Aufgabe 33: (2 Punkte)
Gib zwei mögliche Verfahren an, um die zweidimensionale Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 4\pi l_b \rho$ in periodischen Randbedingungen numerisch zu lösen.

Antwort:

10 Programmieren (10 Punkte)

Aufgabe 34: (5 Punkte)

Schreibe eine Pythonfunktion `random()`, die einen linearen Kongruenzgenerator nach der Formel $x_{i+1} = (ax_i + b) \bmod m$ für $a = 1103515245$, $m = 2^{31}$ und $b = 12345$ implementiert.

Antwort:

Aufgabe 35: (3 Punkte)

Forme die folgende Pythonschleife in einen entsprechenden NumPy-Ausdruck (ohne Schleife in Python) um.

```
    for i in range(N+1): a[i] += b[N-i]
```

Antwort:

Aufgabe 36: (2 Punkte)

Was macht das folgende Codebeispiel? Wie kannst Du es in NumPy vereinfachen?

```
l = []
for i in range(10000): l.append(random.uniform(0,1))
```

Antwort: