

**Übungsblatt 6**  
**Theoretische Physik V : Kontinuumsmechanik**  
**WS 2009/10**

Fakultät Mathematik und Physik  
Universität Stuttgart  
Prof. Dr. R. Hilfer

**Aufgabe 1 (Votieraufgabe):**

**(4 Punkte)**

In der Vorlesung haben Sie die Drehimpulsbilanz in *räumlicher* Formulierung kennengelernt. Dabei ergab sich die Symmetrie des *Cauchy'schen* Spannungstensors  $T = T^T$ .

Leiten Sie analog zur Vorlesung die Drehimpulsbilanz in *materieller* Formulierung her. Folgern Sie daraus die Symmetrieaussagen für den ersten und den zweiten *Piola-Kirchhoffschen* Spannungstensor ( ${}^I P$  und  ${}^{II} P$ ):

$${}^I P \cdot F^T = F \cdot {}^I P^T$$

$${}^{II} P = {}^{II} P^T$$

**Aufgabe 2 (Votieraufgabe):**

**(4 Punkte)**

a) Zeigen Sie, dass für ein ruhendes Medium die Gleichgewichtsbedingung

$$\rho k + \operatorname{div} T = 0$$

aus der Impulsbilanz folgt, wobei  $k$  die Massenkraftdichte und  $T$  den Spannungstensor darstellt. Zeigen Sie, dass für ein isotropes Medium

$$T = -pI$$

gilt.

(1 Punkt).

- b) Leiten Sie aus der Bedingung in a) die barometrische Höhenformel

$$p = p_0 \exp(-\varrho_0 g z / p_0)$$

ab.

Hinweis:  $p$  und  $\varrho$  sind Druck bzw. Dichte der Luft,  $g$  ist die Erdbeschleunigung und wird als konstant angesetzt und  $z$  ist die Höhe über der Erdoberfläche. Betrachten Sie die Atmosphäre als isothermes, ideales Gas, so dass die Beziehung  $p/p_0 = \varrho/\varrho_0$  gilt. (2 Punkte).

- c) Bestimmen Sie den Druckverlauf für den Fall, dass die Luft der Polytropengleichung  $\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho^n}{\varrho_0^n}$  genügt. (1 Punkt).

### Aufgabe 3 (Hausaufgabe):

(6 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie das Reynoldssche Transporttheorem

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \int_B \left( \frac{D\Phi}{Dt} + \Phi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) V \quad \text{mit } \Psi = \int_B \Phi V$$

kennengelernt und mit seiner Hilfe aus der Massenerhaltung die Kontinuitätsgleichung der Massendichte abgeleitet. Analog lassen sich mit seiner Hilfe auch die Kontinuitätsgleichungen für weitere dichteartige Größen herleiten.

- a) Leiten Sie aus den Maxwellgleichungen ohne Materie die Kontinuitätsgleichung der Ladungsdichte her.  
Benutzen Sie nun das Reynoldssche Transporttheorem für eine alternative Herleitung, indem Sie von der Ladungserhaltung ausgehen. (2 Punkte).
- b) Die Energiedichte des freien elektromagnetischen Feldes lautet in SI-Einheiten  $u = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2$ .  
Wie lauten die dazugehörigen Bilanzgleichungen, die Sie mit Hilfe der homogenen Maxwell-Gleichungen bzw. mit dem Reynoldsschen Transporttheorem gewinnen? Zeigen Sie die Äquivalenz beider Gleichungen, indem Sie explizit ebene elektromagnetische Wellen annehmen. (2 Punkte).
- c) Wie lautet die Kontinuitätsgleichung der Quantenmechanik und welche Erhaltungsgröße spielt hierbei eine Rolle? (1 Punkt).
- d) Wie sieht die lokale Bilanzgleichung für die Impulsdichte  $p = \rho v$  aus? Interpretieren Sie die dabei auftretenden Terme. (1 Punkt).