Makroskopische Hydrodynamik

Finite Volumen Methoden für hyperbolische Probleme

Peter-Simon Dieterich

Hauptseminar Moderne Simulationsmethoden in der Physik

28. Januar 2010

Übersicht

partielle Differentialgleichungen

- eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion mit mindestens zwei partiellen Ableitungen
- Keine einheitliche bzw. abgeschlossene Theorie existent
- Theorie und Lösungsverfahren meist nur auf kleine Gruppe von Gleichungen anwendbar
- Keine eindeutige Klassifikation der Gleichungstypen
  - elliptisch
  - parabolisch
  - hyperbolisch

Partielle Differentialgleichungen

Laplace-Gleichung

- $\Delta u = 0$
- Modellierung von Potentialen einer inkompressiblen Flüssigkeit
- Modellierung eines stationären Temperaturfeldes
- Beispiel für eine elliptische PDGL.

Diffusionsgleichung

- $\partial_t u = \Delta u$
- Modellierung der Temperaturverteilung eines Körpers durch Wärmeleitung
- Modellierung der Diffusion eines Stoffes
- Beispiel für eine parabolische PDGL.

Wellengleichung

- $\partial_t^2 u = \Delta u$
- Modellierung von Saiten, Membranen, Lichtausbreitung im Vakuum oder Oberflächenwellen
- Beispiel für eine hyperbolische PDGL.

Massenerhaltung

- Die Massenerhaltung in einem Kontinuum ist gegeben durch

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho dx = 0,$$

wobei $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ die Dichte angibt.

- Dies ist mit dem Reynolds'schem Transportsatz äquivalent zu

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx + \int_{\partial\Omega_t} \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dx = 0.$$

- Da die Gleichungen für alle Kontrollvolumen Ω_t gelten erhalten wir, falls ρ und v glatt genug sind, die *differentielle Form* des Erhaltungssatzes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0.$$

Impulserhaltung

- Der Impulserhaltungssatz lautet

$$\int_{\Omega_t} \rho(\partial_t v + (v \cdot \nabla)v) - \operatorname{div} \sigma - \rho\, f \, dx = 0,$$

  wobei σ der Cauchy'sche Spannungstensor und f eine massenbezogene Kraftdichte ist.

- Für hinreichend glatte ρ, v, σ lautet die differentielle Form

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v \right) = \operatorname{div} \sigma + \rho\, f.$$

Allgemeine Form

Wir beschränken uns im Folgenden auf eine Raumdimension.

Definition

Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ glatt. Dann nennen wir das System der m Gleichungen

$$\partial_t q(x,t) + \partial_x f(q(x,t)) = 0,$$

wobei $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \Omega$, *System von Erhaltungssätzen*.
Man nennt f *Flussfunktion* und q *Erhaltungsgröße*.

- Mit der Jacobi Matrix $A(x) = Df(x), x \in \Omega$ folgt mit der Kettenregel
$$\partial_t q + A(q)\partial_x q = 0.$$
Gleichungen dieses Typs nennt man *quasilinear*.
- Die Erhaltung der Größe q wird offensichtlich, wenn wir die Integralform für $I = [x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$
$$\frac{d}{dt}\int_I q(x,t)dx = -f(q(x,t))|_I$$
des Systems betrachten.
- Wenn wir außerdem annehmen, dass $\lim_{|x|\to\infty} q(x,t) = 0$ und $f(0) = 0$, dann liefert eine Integration über das Zeitintervall $[0,t]$ und $I = \mathbb{R}$
$$\int_{\mathbb{R}} q(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} q(x,0)dx.$$

Beispiele

Beispiel (Advektionsgleichung)

$$\partial_t q + c\partial_x q = 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

Beispiel (Burgersgleichung, nicht viskos)

$$\partial_t q + q\partial_x q = 0$$

Beispiel (Linearisierte Eulergleichungen)

$$\partial_t \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & K \\ \rho^{-1} & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} p \\ u \end{pmatrix} = 0.$$

Hyperbolische partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition

Das System

$$\partial_t q + \partial_x f(q) = 0$$

heißt *hyperbolisch* in $x \in \Omega$, wenn die Jacobi-Matrix $A(x) = D\, f(x)$ diagonalisierbar ist und nur reelle Eigenwerte besitzt.
Das System heißt hyperbolisch, wenn es für alle $x \in \Omega$ hyperbolisch ist.

Cauchy-Problem

Cauchy-Problem

Finde $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \Omega$, so dass q das System

$$\partial_t q + \partial_x f(q) = 0$$

löst und die Anfangswertbedingung

$$q(x, 0) = q_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

erfüllt, wobei $q_0 : \mathbb{R} \to \Omega$ eine gegebene Funktion ist.

Lösung des linearen Cauchy-Problems

- Wir betrachten für eine diagonalisierbare $m \times m$ Matrix A das Problem
$$q_t + Aq_x = 0, \quad q(x,0) = q_0(x)$$
für gegebenes $q_0(x) : \mathbb{R} \to \Omega$.
- $\exists$ Matrix $R = (r^1, r^2, \dots, r^m)$ aus Rechtseigenvektoren r^p, so dass $R^{-1}AR = \Lambda$ mit $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.
- In den Variablen $w = R^{-1}q$ reduziert sich das System auf m Gleichungen
$$w_t^p + \lambda_p w_x = 0, \quad p = 1, \dots, m$$
- mit den aus der Advektionsgleichung bekannten Lösungen
$$w^p(x,t) = w^p(x - \lambda^p t, 0) = w_0^p(x - \lambda^p t),$$
wobei $w_0(x) = R^{-1}q_0(x)$.

- Somit erhalten wir als Lösung

$$q(x,t) = \sum_{p=1}^{m} w^p(x,t) r^p$$

- $q(x,t)$ ist Superposition von m Wellen mit Ausbreitungsgeschwindigkeit λ_p.
- Man nennt die Funktionen $w^p(x,t)$ *charakteristische Variablen*
- und die Kurven $X(t) = x_0 + \lambda_p t$, entlang denen $w^p(x,t) = w^p(x_0, 0)$ gilt, *p-Charakteristiken*.

Riemann-Problem

- Bisher haben wir angenommen, dass q_0 bzw. q hinreichend glatt sind.
- Wählen wir q_0 als nicht differenzierbar, dann ist unsere eben erhaltene Lösung

$$q(x,t) = \sum_{p=1}^{m} w^p(x,t) r^p$$

keine Lösung mehr im klassischen Sinne. (Stichwort schwache Lösung)

- Besitzt q_0 Singularitäten, dann sicher auch eine der charakteristischen Variablen.
- Ausbreitung nur möglich entlang der Charakteristiken

Riemann-Problem für ein lineares System

Das Riemann-Problem besteht aus einem linearen hyperbolischen System zusammen mit der Anfangsbedingung

$$q_0(x) = \begin{cases} q_l & \text{wenn } x < 0, \\ q_r & \text{wenn } x > 0, \end{cases}$$

für $q_l, q_r \in \mathbb{R},\ q_l \neq q_r$.

Lösung des linearen Riemann-Problems

- Zerlege q_l und q_r

$$q_l = \sum_{p=1}^{m} w_l^p r^p \quad \text{und} \quad q_r = \sum_{p=1}^{m} w_r^p r^p$$

- Es ist

$$w^p(x,t) = w_0^p(x - \lambda_p t) = \begin{cases} w_l^p & \text{wenn } x - \lambda_p t < 0, \\ w_r^p & \text{wenn } x - \lambda_p t > 0, \end{cases}$$

- Wir können nun unsere Lösung q schreiben als

$$q(x,t) = \sum_{p=1}^{m} w^p(x,t) r^p = \sum_{p:\lambda_p < x/t} w_r^p r^p + \sum_{p:\lambda_p > x/t} w_l^p r^p .$$

- Der Sprung an der p-ten Charakteristik beträgt gerade

$$\mathcal{W}^p := \alpha_p r^p := (w_r^p - w_l^p) r^p$$

und ist somit ein Eigenvektor von A.

- Löse also das lineare Gleichungssystem

$$R\alpha = q_r - q_l.$$

- Die Lösung ergibt sich dann zu

$$q(x,t) = q_l + \sum_{p:\, \lambda_p < x/t} \mathcal{W}^p = q_l + \sum_{p=1}^{m} H(x - \lambda^p t)\mathcal{W}^p$$

oder äquivalent

$$q(x,t) = q_r - \sum_{p=1}^{m} H(\lambda^p t - x)\mathcal{W}^p$$

.

Finite-Volumen-Methode

Finite-Volumen-Methode

- numerisches Verfahren zur Lösung von Erhaltungsgleichungen
- Diskretisierung des Raumes in Zellen
- Statt q werden die Zellmittelwerte von q

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{\text{Zelle } i} q(x, t_n) dx$$

  approximiert
- In jedem Zeitschritt wird mithilfe des Flusses die Änderung der Größe Q_i^n bestimmt
- konservativ, da aus Integralform hergeleitet

CFL-Bedingung

CFL-Bedingung

- benannt nach Courant, Friedrichs und Lewy
- notwendige Bedingung für Stabilität

$$\max_p |\lambda_p| \leqslant \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- d.h. Informationen dürfen sich in einem Zeitschritt nicht mehr als eine Zelle weit ausbreiten

Godunov-Methode

Godunov-Methode

1. Konstruiere auf den Zellen stückweise konstantes Polynom aus den Zellmittelwerten Q_i^n
2. Entwickle die hyperbolische Gleichung bis zum nächsten Zeitschritt, durch Lösung/Approximation des Riemann-Problems
3. Q_i^{n+1} durch Mittelung der erhaltenen Lösung über jede Zelle

Vor- und Nachteile

Vorteile

- konservativ
- begrenzter Rechenaufwand und wenig Speicherbedarf, da meistens explizit
- auch für große Probleme (3D) geeignet

Nachteile

- nur einfache Geometrien
- Beschränkung an den Zeitschritt

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit