Übungsblatt 4
Theoretische Physik III: Elektrodynamik
SS 2014

Fakultät Mathematik und Physik, Universität Stuttgart
Prof. Dr. Dr. R. Hilfer
A. Lemmer (andreas.lemmer@icp.uni-stuttgart.de)

Aufgabe 1 (Votieraufgabe) **4 Punkte**

Eine unendlich ausgedehnte Ebene sei homogen geladen mit der Flächenladungsdichte σ. Die Ladungsdichte kann geschrieben werden als $\rho(\boldsymbol{r}) = \sigma\delta(z)$ mit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke und ihr Potential

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\boldsymbol{s})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}|} \, \mathrm{d}^3\boldsymbol{s}\,.$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit Blatt 3, Aufgabe 3!

Aufgabe 2 (Votieraufgabe) **4 Punkte**

Man betrachte die elektrische Ladungsverteilung ($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$)

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \rho_0 & \text{wenn} \quad x^2 + y^2 + c^{-2}\, z^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad ,$$

die ein homogen geladenes Ellipsoid darstellt.
Bestimmen Sie das elektrische Potential $\varphi(\boldsymbol{r})$ außerhalb des Ellipsoids und finden Sie die Äquipotentialflächen $\varphi = \text{const.}$

Aufgabe 3 (Hausaufgabe) **3 Punkte**

Betrachten Sie zwei konzentrische Kugeln um $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ mit Radien R_1 und R_2, $R_1 < R_2$. Die folgende räumliche Ladungsdichte sei angenommen ($\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3, r = |\boldsymbol{r}|$):

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \alpha\, r^{-2} & \text{wenn} \quad R_1 < r < R_2 \quad (\alpha > 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Man berechne die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ in den Gebieten

1. $0 \leq r < R_1\,,$
2. $R_1 \leq r \leq R_2\,,$
3. $R_2 < r\,.$

Aufgabe 4 (Hausaufgabe) **4 Punkte**

Die Energiedichte $[J/m^3]$ $w(\boldsymbol{r})$ eines elektrischen Feldes $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$ lautet

$$w(\boldsymbol{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2\,,$$

und die Gesamtenergie ist somit

$$W(\boldsymbol{E}) = \int_{\mathbb{R}^3} w(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

(vgl. Vorlesung). Andererseits ist die Gesamtenergie von N Punktladungen $q_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., N$ an den Orten $\boldsymbol{r}_i \in \mathbb{R}^3$

$$W_N = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i\, q_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{q_i\, q_j}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|}\,.$$

Offensichtlich gilt $W(\boldsymbol{E}) \geq 0$ für alle $\boldsymbol{E}$-Felder, während W_N auch negativ werden kann, z.B. für $q_1 < 0\,,\ q_{2,...,N} > 0$.
Erläutern Sie den Unterschied zwischen W_N und $W(\boldsymbol{E})$ durch Berechnung der Wechselwirkungsenergie für $N = 2$ Punktladungen.