

Übungsblatt 6

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie I

Klassische Feldtheorie

WS 2015/16

Fakultät Mathematik und Physik

Universität Stuttgart

Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe):

(4 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass für ein ruhendes Medium die Gleichgewichtsbedingung

$$\varrho \mathbf{k} + \operatorname{div} \mathbf{T} = 0$$

aus der Impulsbilanz folgt, wobei \mathbf{k} die Massenkraftdichte und \mathbf{T} den Spannungstensor darstellt. Zeigen Sie, dass für ein isotropes Medium

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I}$$

gilt.

(1 Punkt).

- b) Leiten Sie aus der Bedingung in a) die barometrische Höhenformel

$$p = p_0 \exp(-\varrho_0 g z / p_0)$$

ab.

Hinweis: p und ϱ sind Druck bzw. Dichte der Luft, g ist die Erdbeschleunigung und wird als konstant angesetzt und z ist die Höhe über der Erdoberfläche. Betrachten Sie die Atmosphäre als isothermes, ideales Gas, so dass die Beziehung $p/p_0 = \varrho/\varrho_0$ gilt. (2 Punkte).

- c) Bestimmen Sie den Druckverlauf für den Fall, dass die Luft der Polytropengleichung $\frac{p}{p_0} = \frac{\varrho^n}{\varrho_0^n}$ genügt. (1 Punkt).

Aufgabe 2 (Votieraufgabe):**(3 Punkte)**

In der Vorlesung haben Sie die Energiebilanz in *räumlicher* Formulierung kennengelernt. Leiten Sie analog zur Vorlesung die Energiebilanz in *materieller* Formulierung her.

Aufgabe 3 (Hausaufgabe):**(3 Punkte)**

Wir betrachten ein Gebiet $G = G_1 + G_2$, in dem mit Ausnahme einer Unstetigkeitsfläche U alle den Zustand eines Kontinuums bestimmenden—von x , y , z und t abhängenden—Funktionen stetig differenzierbar sind und ihre rechts- und linksseitigen Grenzwerte bei Annäherung an U existieren. Es bedeuten \mathbf{u} die Geschwindigkeit von U und \mathbf{N} den zugehörigen Normaleneinheitsvektor, der in das Gebiet G_2 weisen möge. Lässt man eine Orts- und Zeitveränderlichkeit von G und seiner Berandung ∂G zu, so nimmt die Kontinuitätsgleichung die Form

$$\frac{d}{dt} \int_G \varrho dV = 0$$

an.

Betrachtet man eine Funktion $\psi = \psi(x, y, z; t)$ und vollzieht man für diese Funktion den Grenzübergang zur Unstetigkeitsfläche U , so ergibt sich

$$\lim_{G \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \int_G \psi dV = \int_U [\psi_1 (\mathbf{u} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{N} - \psi_2 (\mathbf{u} - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{N}] dF. \quad (1)$$

(Zur Herleitung siehe unten.) Die Größen ψ_1 und ψ_2 stellen den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von ψ an U dar und \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von \mathbf{v} an U . \mathbf{v} ist die Geschwindigkeit der Materie relativ zu ∂G , die von \mathbf{u} als Geschwindigkeit von U in G zu unterscheiden ist, welche zur Lageveränderung von G_1 und G_2 in G führt.

- a) Zu welchem Ergebnis führt die Anwendung der Formel (1) auf die Kontinuitätsgleichung? Interpretieren Sie physikalisch.
- b) Schreiben Sie die Clausius-Duhem-Ungleichung aus der Thermodynamik für das Gebiet G in integraler Form. Wenden Sie die Formel (1) darauf an und beachten Sie das Ergebnis des Aufgabenteils a).

- c) Was ergibt sich aus b), wenn Sie als Material ein ideales Gas verwenden? Interpretieren Sie das Ergebnis.

Herleitung der Formel (1)

Zerlegung des Integrals in eine Summe über G_1 und G_2 :

$$\frac{d}{dt} \int_G \psi dV = \frac{d}{dt} \left(\int_{G_1} \psi dV + \int_{G_2} \psi dV \right). \quad (2)$$

Wir betrachten das Integral über G_1 . Die Ableitung $\frac{d}{dt}$ beschreibt die zeitliche Änderung des Volumenintegrals durch die Änderung von ψ einerseits und die Änderung des Integrationsgebietes andererseits. Da innerhalb von G_1 keine weiteren Unstetigkeiten vorhanden sind, heben sich dort die Nettoflüsse durch die Volumenelemente auf. Die einzigen Beiträge zum zweiten Term sind also die Flüsse durch die Oberflächen von G_1 :

$$\frac{d}{dt} \int_{G_1} \psi dV = \int_{G_1} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \sum_i \int_{\text{Flächen}_i} \psi_i \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}_i dF, \quad (3)$$

wobei ψ_i der Grenzwert von ψ an und \mathbf{n}_i die Normalen auf die Oberflächen sind. \mathbf{w}_i ist die Geschwindigkeit der Fläche i . Damit ist $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}_i$ die Flußrate durch die Fläche i .

Das Gebiet G_1 ist durch die materielle Fläche F_1 und die Unstetigkeitsfläche U berandet. Die Summe in (3) lautet dann

$$\sum_i \int_{\text{Flächen}_i} \psi_i \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}_i dF = \int_{F_1} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dF + \int_U \psi_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dF. \quad (4)$$

Dabei besitzen die Größen \mathbf{v}_i und ψ_i auf der materiellen Fläche F_1 die Werte \mathbf{v} und ψ .

Wir wollen nun den ersten Term auf der rechten Seite von (4) als Volumenintegral über das Gebiet G_1 schreiben. (Wenn ψ die Massendichte darstellt, so ergeben sich dann die Kontinuitätsgleichung und zusätzlich die Terme von der Unstetigkeitsfläche.) Dazu schreiben wir ihn als

$$\int_{F_1} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dF = \int_{F_1+U-U} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dF = \int_{\partial G_1} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dF + \int_{-U} \psi_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{N} dF \quad (5)$$

mit $\partial G_1 = F_1 + U$. Dabei ist das Integral über $-U$ gleich dem Integral über U mit negativ orientiertem $\mathbf{N} dF$.

Zusammenfassend erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \int_{G_1} \psi dV = \int_{G_1} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \int_{\partial G_1} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dF + \int_U \psi_1 (\mathbf{u} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{N} dF. \quad (6)$$

Verwendet man für das Integral über die Fläche ∂G den Gaußschen Satz, der besagt, daß ein Oberflächenintegral über ein stetiges Vektorfeld gleich dem entsprechenden Volumenintegral über die Divergenz des Vektorfeldes ist, so ergibt sich aus (5) schließlich

$$\frac{d}{dt} \int_{G_1} \psi dV = \int_{G_1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla(\psi \mathbf{v}) \right] dV + \int_U \psi_1 (\mathbf{u} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{N} dF. \quad (7)$$

Eine analoge Beziehung erhält man für das Gebiet G_2 , so daß aus (2) letztendlich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_G \psi \, dV &= \int_{G_1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla(\psi \mathbf{v}) \right] dV + \int_{G_2} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla(\psi \mathbf{v}) \right] dV \\ &\quad - \int_U \psi_1 (\mathbf{u} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{N} \, dF + \int_U \psi_2 (\mathbf{u} - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{N} \, dF \end{aligned} \tag{8}$$

hervorgeht. Vollzieht man die beiden Grenzprozesse

$$G_1 \rightarrow 0, \quad G_2 \rightarrow 0$$

so, daß sich das Gebiet G auf die Unstetigkeitsfläche U zusammenzieht, dann ergibt sich aus (8) die Formel (1).