

Übungsblatt 2

Relativitätstheorie II

Sommersemester 2015
Fakultät für Physik, Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe)

3 Punkte

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $p \in M$, T_pM der Tangentialraum bei p , $x \in T_pM$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine konstante Funktion auf M .
Zeigen Sie, daß dann $xf = 0$ gilt.

Aufgabe 2 (Hausaufgabe)

4 Punkte

Zeigen Sie, daß die in Definition 3.1.12 der Vorlesung eingeführten Tangentialvektoren ∂_i am Punkt $p \in U$ einer Karte (U, φ) einer glatten Mannigfaltigkeit M eine Basis im Tangentialraum T_pM am Punkt p bilden.

Aufgabe 3 (Votieraufgabe)

4 Punkte

Es seien \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} zwei glatte Vektorfelder auf der glatten Mannigfaltigkeit M .
Zeigen Sie, daß die Abbildung $\mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$, die einer glatten Funktion $f \in \mathcal{F}(M)$ die Zahl $(\mathfrak{X}\mathfrak{Y}f)(p) - (\mathfrak{Y}\mathfrak{X}f)(p)$ zuordnet, ein Tangentialvektor in T_pM ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (Hausaufgabe)

6 Punkte

Sei $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die Einheitskugelfläche mit dem bekannten Atlas $\{(\mathbb{S}^2 \setminus \{p_+\}, \Psi_+), (\mathbb{S}^2 \setminus \{p_-\}, \Psi_-)\}$, wobei $p_{\pm} := (0, 0, \pm 1)$, aus der Vorlesung (siehe Hinweis). Außerdem sei das konstante Vektorfeld $\mathbf{v}_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (1, 0)$ auf \mathbb{R}^2 gegeben.

1. Zeigen Sie: Durch $\mathfrak{X} := (D\Phi_+ \cdot \mathbf{v}_x) \circ \Psi_+$ ist (implizit) ein glattes Vektorfeld \mathfrak{X} auf \mathbb{S}^2 definiert, wobei $D\Phi_+$ die Funktionalmatrix der Abbildung $\Phi_+ = \Psi_+^{-1}$ in *kartesischen* Koordinaten ist. Berechnen Sie dazu $D\Psi_{\pm}$, $D\Phi_{\pm}$ und $D(\Psi_{\pm} \circ \Phi_{\mp})$, sowie die Koordinatendarstellung $\mathbf{w}_x := (D\Psi_- \cdot \mathfrak{X}) \circ \Phi_-$ des Vektorfeldes \mathfrak{X} in der Karte Ψ_- .
2. Skizzieren Sie das Vektorfeld \mathfrak{X} möglichst detailgetreu. Um auch am Nordpol eine gute Darstellung zu gewährleisten, skizzieren Sie zuerst \mathbf{w}_x . Nutzen Sie dazu, daß die Integralkurven von \mathbf{v}_x Geraden sind und daß Φ_{\pm} und Ψ_{\pm} verallgemeinerte Kreise bewahren. (verallgemeinerter Kreis = Kreis oder Gerade)
3. Führen sie die Schritte 2. und 3. in Gedanken für $\mathbf{v}_y = (0, 1)$, \mathfrak{Y} und \mathbf{w}_y nochmals durch. Was ändert sich?

Hinweis: Die Koordinatenabbildungen Ψ_{\pm} sind stereographische Projektionen. In kartesischen Koordinaten sind diese gegeben durch

$$\Psi_{\pm}: \mathbb{S}^2 \setminus \{p_{\pm}\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{s} = (x, y, z)^t \mapsto \left(\frac{x}{1 \mp z}, \frac{y}{1 \mp z} \right)^t.$$

Die Umkehrabbildungen $\Phi_{\pm} := \Psi_{\pm}^{-1}$ sind gegeben durch

$$\Phi_{\pm}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{p_{\pm}\}, \quad (x, y)^t \mapsto \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \mp \frac{1-(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} \right)^t.$$