

# Übungsblatt 4

## Relativitätstheorie II

Sommersemester 2015

Fakultät für Physik, Universität Stuttgart

Prof. Dr. R. Hilfer

### Aufgabe 1 (Votieraufgabe)

3 Punkte

Es sei  $M$  eine Raumzeit und  $p \in M$ .

1. Erklären Sie, warum ein zukunftsweisender zeitartiger Tangentialvektor  $x \in T_p M$  mit  $g(x, x) = 1$  einen momentanen Beobachter im Punkt  $p$  repräsentiert.
2. Die Relativgeschwindigkeit zweier Beobachter  $x, z$  sei definiert als der raumartige Tangentialvektor  $v \in x^\perp$ , der durch  $z = \lambda(x + v)$  mit  $\lambda > 0$  eindeutig bestimmt ist. (Dabei ist  $x^\perp$  der Raum aus Aufgabe 4.1.)

Zeigen Sie, dass die Relativgeschwindigkeit von  $x$  und  $z$  gerade

$$v = \frac{z}{g(x, z)} - x \quad (1)$$

beträgt.

3. Zeigen Sie, dass in der Relativitätstheorie alle Relativgeschwindigkeiten kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, d.h. dass

$$-1 < g(v, v) \leq 0 \quad (2)$$

gilt.

### Aufgabe 2 (Votieraufgabe)

4 Punkte

Beweisen Sie, analog zu den Gleichungen (5.3.2) – (5.3.4), einen Ausdruck für die kovariante Ableitung  $\nabla_i T_{k_1 \dots k_q}^{j_1 \dots j_p}$  eines  $(p, q)$ -Tensors.

*Bitte wenden!*

### Aufgabe 3 (Hausaufgabe)

8 Punkte

Sei  $z(\tau)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , die nach der Eigenzeit  $\tau$  parametrisierte Trajektorie eines Beobachters im zweidimensionalen Lorentzraum  $\mathbb{R}^{1,1}$  mit metrischem Tensor  $g = \text{diag}(1, -1)$  (bezüglich dem Koordinatensystem  $(x^0, x^1)$ ). Der Geschwindigkeitsvektor  $u(\tau) = \frac{d}{d\tau}z(\tau)$  erfüllt  $g(u(\tau), u(\tau)) = 1$  für alle  $\tau \in \mathbb{R}$  und ist zukunftsweisend.

Die *Radarkoordinaten*  $(y^0, y^1)$  auf der Radarmenge  $\mathcal{R}_{z(\tau)}$  werden wie folgt definiert. Für einen Punkt  $p \in \mathcal{R}_{z(\tau)}$  ist

$$y^0(p) := \frac{1}{2}(\tau^+(p) + \tau^-(p)), \quad y^1(p) := \frac{1}{2}(\tau^-(p) - \tau^+(p)) \quad (3)$$

wobei die  $\tau^\pm(p) \in \mathbb{R}$  jeweils als Lösungen der Bedingungen  $z(\tau^\pm(p)) \in \ell_p^\pm$  definiert werden, falls diese existieren, und die Mengen  $\ell_q^\pm := \{x \in \mathbb{R}^{1,1} : x = (q^0, q^1) + (s, \pm s), s \in \mathbb{R}\}$  die Lichtstrahlen durch den Punkt  $q \in \mathbb{R}^{1,1}$  sind. Die Radarmenge ist definiert als

$$\mathcal{R}_{z(\tau)} := \{q \in \mathbb{R}^{1,1} : \text{es gibt } \tau^+ \in \mathbb{R} \text{ und } \tau^- \in \mathbb{R} \text{ mit } z(\tau^+) \in \ell_q^+ \text{ und } z(\tau^-) \in \ell_q^-\}. \quad (4)$$

1. Zeigen Sie, daß das Radarkoordinatensystem des Beobachters für beliebige Trajektorien  $z(\tau)$  wohldefiniert ist (d.h. die Lösungen der Gleichungen  $z(\tau) \in \ell_p^\pm$  sind eindeutig für  $p \in \mathcal{R}_{z(\tau)}$ ). Zeigen Sie, daß die inverse Koordinatentransformation  $x^\mu(y^\nu)$  als Funktion von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathcal{R}_{z(\tau)}$  existiert. Was sind die  $(y^0, y^1)$ -Komponenten von  $z(\tau)$  und  $u(\tau)$ ?
2. Der Beobachter bewege sich auf der Trajektorie mit  $x^0(z(\tau)) = a^{-1} \sinh(a\tau)$ ,  $x^1(z(\tau)) = a^{-1} \cosh(a\tau)$ , mit einer Konstanten  $a > 0$ . Berechnen Sie die Radarmenge  $\mathcal{R}_{z(\tau)}$  und die Radarkoordinaten  $y^\mu(x^\nu)$ . Zeigen Sie, daß die inverse Funktion  $x^\mu(y^\nu)$  gegeben ist durch

$$x^\mu(y^\mu) = \begin{pmatrix} x^0(y^0, y^1) \\ x^1(y^0, y^1) \end{pmatrix} = \frac{e^{ay^1}}{a} \begin{pmatrix} \sinh(ay^0) \\ \cosh(ay^0) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

3. Berechnen Sie die Komponenten  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ ,  $\tilde{u}^\mu(\tau)$  des metrischen Tensors  $g$  und der Geschwindigkeit  $u(\tau)$  bezüglich der Radarkoordinaten  $y^\mu$ . Berechnen Sie dazu die Funktionalmatrizen  $\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\right)(y^\alpha)$  und  $\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\right)(y^\alpha)$  aus (5). Geben Sie eine anschauliche Interpretation der Formeln.
4. Berechnen Sie alle Christoffelsymbole  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\eta$  in den Koordinaten  $(y^0, y^1)$ .

*Hinweis:* Veranschaulichen Sie sich die Radarkoordinaten mit Hilfe eines Minkowskidiagramms.