Übungsblatt 4

Relativitätstheorie II

Sommersemester 2018
Fakultät für Physik, Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 **3 Punkte**

Es sei M eine Raumzeit und $p \in M$.

1. Erklären Sie, warum ein zukunftsweisender zeitartiger Tangentialvektor $x \in T_pM$ mit $g(x,x) = 1$ einen momentanen Beobachter im Punkt p repräsentiert.

2. Die Relativgeschwindigkeit zweier Beobachter x, z sei definiert als der raumartige Tangentialvektor $v \in x^\perp$, der durch $z = \lambda(x + v)$ mit $\lambda > 0$ eindeutig bestimmt ist. (Dabei ist $x^\perp$ der Raum F aus Aufgabe 3 von Blatt 3.)

   Zeigen Sie, dass die Relativgeschwindigkeit von x und z gerade
   $$v = \frac{z}{g(x,z)} - x \tag{1}$$
   beträgt.

3. Zeigen Sie, dass in der Relativitätstheorie alle Relativgeschwindigkeiten kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, d.h. dass
   $$-1 < g(v,v) \leq 0 \tag{2}$$
   gilt.

Aufgabe 2 **4 Punkte**

Beweisen Sie, analog zu den Gleichungen (5.3.2) – (5.3.4), einen Ausdruck für die kovariante Ableitung $\nabla_i T^{j_1 \dots j_p}_{k_1 \dots k_q}$ eines (p,q)-Tensors.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 **8 Punkte**

Sei $z(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, die nach der Eigenzeit τ parametrisierte Trajektorie eines Beobachters im zweidimensionalen Lorentzraum $\mathbb{R}^{1,1}$ mit metrischem Tensor $g = \mathrm{diag}(1, -1)$ (bezüglich dem Koordinatensystem (x^0, x^1)). Der Geschwindigkeitsvektor $u(\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} z(\tau)$ erfüllt $g(u(\tau), u(\tau)) = 1$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und ist zukunftsweisend.
Die *Radarkoordinaten* (y^0, y^1) *auf der Radarmenge* $\mathscr{R}_{z(\tau)}$ werden wie folgt definiert. Für einen Punkt $p \in \mathscr{R}_{z(\tau)}$ ist

$$y^0(p) := \frac{\tau^+(p) + \tau^-(p)}{2}, \qquad y^1(p) := \frac{\tau^-(p) - \tau^+(p)}{2} \tag{3}$$

wobei die $\tau^\pm(p) \in \mathbb{R}$ jeweils als Lösungen der Bedingungen $z(\tau^\pm(p)) \in L_p^\pm$ definiert werden, falls diese existieren, und die Mengen $L_q^\pm := \{x \in \mathbb{R}^{1,1} : x = (q^0, q^1) + (s, \pm s),\ s \in \mathbb{R}\}$ die Lichtstrahlen durch den Punkt $q \in \mathbb{R}^{1,1}$ sind. Die Radarmenge ist definiert als

$$\mathscr{R}_{z(\tau)} := \{q \in \mathbb{R}^{1,1} : \text{es gibt } \tau^+ \in \mathbb{R} \text{ und } \tau^- \in \mathbb{R} \text{ mit } z(\tau^+) \in L_q^+ \text{ und } z(\tau^-) \in L_q^-\}. \tag{4}$$

1. Zeigen Sie, daß das Radarkoordinatensystem des Beobachters für beliebige Trajektorien $z(\tau)$ wohldefiniert ist (d.h. die Lösungen der Gleichungen $z(\tau) \in L_p^\pm$ sind eindeutig für $p \in \mathscr{R}_{z(\tau)}$). Bestimmen Sie die inverse Koordinatentransformation $x^\mu(y^\nu)$ als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathscr{R}_{z(\tau)}$. Was sind die (y^0, y^1)-Komponenten von $z(\tau)$ und $u(\tau)$?

2. Der Beobachter bewege sich auf der Trajektorie mit $x^0(z(\tau)) = a^{-1}\sinh(a\tau)$, $x^1(z(\tau)) = a^{-1}\cosh(a\tau)$, mit einer Konstanten $a > 0$. Berechnen Sie die Radarmenge $\mathscr{R}_{z(\tau)}$ und die Radarkoordinaten $y^\mu(x^\nu)$. Zeigen Sie, daß die inverse Funktion $x^\mu(y^\nu)$ gegeben ist durch

$$x^\mu(y^\mu) = \begin{pmatrix} x^0(y^0, y^1) \\ x^1(y^0, y^1) \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{ay^1}}{a} \begin{pmatrix} \sinh(ay^0) \\ \cosh(ay^0) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

3. Berechnen Sie die Komponenten $\tilde{g}_{\mu\nu}$, $\tilde{u}^\mu(\tau)$ des metrischen Tensors g und der Geschwindigkeit $u(\tau)$ bezüglich der Radarkoordinaten y^μ. Berechnen Sie dazu die Funktionalmatrizen $\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}(y^\alpha)\right)$ und $\left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}(y^\alpha)\right)$ aus (5). Geben Sie eine anschauliche Interpretation der Formeln.

4. Berechnen Sie alle Christoffelsymbole $\tilde{\Gamma}^\eta_{\mu\nu}$ in den Koordinaten (y^0, y^1).

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die Radarkoordinaten mit Hilfe eines Minkowskidiagramms.