Übungsblatt 7

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie II

Klassische Feldtheorie

SS 2019

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1: **(4 Punkte)**

Die elastische Energie eines Festkörpers schreibt sich in hookescher Näherung als

$$W = \frac{1}{2} E_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}.$$

1. Für ein isotropes Medium gilt

   $$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

   Wie lauten der Spannungstensor $\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}$ und die elastische Energie in Abhängigkeit von ϵ_{ij}?

2. Die elastische Energie W ist eine quadratische Form der 6 unabhängigen Komponenten des Verzerrungstensors, die für jede Wahl des Verzerrungstensors $\epsilon_{ij} \neq 0$ größer als null sein muss (warum?). Leiten Sie hieraus die Bedingungen für μ und λ her.

Hinweis zu 2:
Möglichkeit 1: Schreiben Sie die elastische Energie als quadratische Form. Welche Bedingung gilt für die Eigenwerte der entsprechenden Matrix?
Möglichkeit 2: Zerlegen Sie den Verzerrungstensor $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(1)} + \epsilon_{ij}^{(2)} = (1/3)\epsilon_{kk}\delta_{ij} + (\epsilon_{ij} - (1/3)\epsilon_{kk}\delta_{ij})$ (physikalische Bedeutung?) und schreiben Sie die elastische Energie in Abhängigkeit von $\epsilon_{ij}^{(1)}$ und $\epsilon_{ij}^{(2)}$.

Aufgabe 2: **(3 Punkte)**

1. Zeigen Sie, dass bei einem kubischen Material von den 21 Komponenten des elastischen Tensors nur drei linear unabhängig sind. Gehen Sie dabei von einem Koordinatensystem aus, bei dem x-, y- und z-Achse entlang der 4-zähligen Richtungen zeigen, und wählen Sie geeignete Symmetrieoperationen (R_{ij}) aus, um mittels $E_{ijkl} = E_{i'j'k'l'} R_{i'i} R_{j'j} R_{k'k} R_{l'l}$ zu zeigen, dass gewisse Komponenten gleich sind bzw. verschwinden.
2. Wie lauten die Stabilitätsbedingungen für die drei elastischen Konstanten aus Teil 1?

Aufgabe 3: **(4 Punkte)**

Ein homogener Quader aus isotrop hookeschem Material wird zwischen zwei glatten ebenen Platten in einer Richtung gestaucht. Bei einem Versuch, siehe Bild a), kann sich der Quader in Querrichtung frei ausdehnen, bei einem anderen Versuch, siehe Bild b), wird er allseitig zwischen starren ebenen glatten Wänden geführt. Bestimmen Sie das Verhältnis der Kräfte unter deren Wirkung sich der Stab in den beiden Versuchen um das gleiche Stück verkürzt. Geben Sie dieses Verhältnis als Funktion der Laméschen Konstanten an und diskutieren Sie dieses Verhältnis in Abhängigkeit der Poissonschen Querkontraktionszahl.