Übungsblatt 5

Relativitätstheorie II

Sommersemester 2015
Fakultät für Physik, Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe) **4 Punkte**

Zeigen Sie aus der Definition, dass die Größe R^i_{jkl} ein Tensor ist.

Aufgabe 2 (Hausaufgabe) **4 Punkte**

Bestimmen Sie die Christoffelsymbole Γ^i_{jk} und den KrümmungstensorR^i_{jkl} für zweidimensionale semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten deren Metrik (g_{ij}) im Koordinatensystem (x^1, x^2) folgende Form hat.

1.
$$(g_{ij})(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & f(x^1) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

wobei $a \neq 0$ konstant ist und $f(x^1)$ eine glatte Funktion ist, die nirgends verschwindet.

2.
$$(g_{ij})(x^1, x^2) = f(x^1) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}. \tag{2}$$

wobei $a \neq 0, b \neq 0$ konstant sind und $f(x^1)$ eine glatte Funktion ist, die nirgends verschwindet.

Aufgabe 3 (Votieraufgabe) **4 Punkte**

Die Einheitskugel im dreidimensionalen Raum sei durch Kugelkoordinaten (θ, ϕ) wie üblich parametrisiert $(0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi)$.
Ein Tangentialvektor $\mathbf{V}$ im Punkt $A(\theta = \pi/2, \phi = 0)$ werde nun entlang des folgenden Weges auf der Kugeloberfläche parallelverschoben: (1) entlang des Längenkreises $\phi = 0$ zum Nordpol, (2) entlang des Längenkreises $\phi = \pi/2$ zurück zum Äquator, (3) entlang des Äquators zurück zum Ausgangspunkt A. Berechnen Sie den Winkel zwischen dem ursprünglichen und parallelverschobenen Vektor im Punkt A. Interpretieren Sie das Resultat geometrisch.

Bitte Wenden!

Aufgabe 4 (Hausaufgabe) **4 Punkte**

Auf Blatt 4 Aufgabe 3 wurde das Radarkoordinatensystem (y^0, y^1) auf der Radarmenge $\mathscr{R}_{z(\tau)}$ vorgestellt. Die Metrik $(\tilde{g}_{ij})(y^0, y^1)$ in Radarkoordinaten zur Trajektorie $z(\tau) = a^{-1}(\sinh(a\tau), \cosh(a\tau))$ aus Aufgabenteil 2, wurde in Aufgabenteil 3 berechnet als

$$(\tilde{g}_{ij})(y^0, y^1) = \mathrm{e}^{2ay^1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Stellen Sie die Geodätengleichungen in diesen Koordinaten auf und lösen Sie diese entweder direkt oder durch einen geschickten Ansatz. Bestimmen Sie zu gegebenem Anfangspunkt $\gamma(0) \in \mathbb{R}^2$ und gegebener Anfangsgeschwindigkeit $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^2$ die entsprechende Geodätische.

Hinweis: Falls Sie versuchen die Gleichung direkt zu lösen: Betrachten Sie die Summe und die Differenz der Geodätengleichungen.