Anmerkung zu Hermite-Polynomen S. 32

Beziehung zwischen der dividierten Differenz und der Ableitung:

Es sei $f \in C^1[a,b]$ und $x_0, x_1, \dots x_n$ seien verschieden in $[a,b]$, dann gibt es eine Zahl ξ in (a,b) mit

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f^{(n)}(\xi) / n!$$

Erzeugung Hermite-Polynom: $n+1$ Stützstellen $x_0, x_1, \dots, x_n$ sind gegeben zusammen mit ihren Werten von f & f'

Definition einer neuen Folge $z_0, z_1, \dots z_{2n+1}$ durch

$$z_{2i} = z_{2i+1} = x_i \text{ für jedes } i = 0, 1, \dots, n.$$

Tabelle der erzeugten Hermite-Polynome (Neville-Schema)

Problem: $f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f[z_{2i+1}] - f[z_{2i}] / z_{2i+1} - z_{2i}$ nicht definiert (s.o.)

Aber für beliebige Zahlen ξ in (x_0, x_1) ist $f[x_0, x_1] = f'(\xi)$

und $\lim\limits_{x_1 \to x_0} f[x_0, x_1] = f'(x_0)$

$\leadsto f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(x_i)$

Einsatz der Glieder $f'(x_0), f'(x_1), \dots f'(x_n)$ anstatt der nicht-definierten Differenzen $f[z_0, z_1], f[z_2, z_3], \dots f[z_{2n}, z_{2n+1}]$

Übrige dividierte Differenzen wie üblich

$$\leadsto H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, z_1, \dots, z_k](x - z_0) \dots (x - z_{k-1})$$

mit $z_{2k} = z_{2k+1} = x_k$ & $f[z_{2k}, z_{2k+1}] = f'(x_k)$ für jedes $k = 1, 2, \dots, n$!