Übungsblatt 12

Fortgeschrittene Kontinuumstheorie II

Klassische Feldtheorie

SS 2017

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe): **(4 Punkte)**

a) Wir behandeln eine ebene, stationäre, wirbelfreie Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Zeigen Sie: Die Geschwindigkeit lässt sich als Gradient einer zweidimensionalen harmonischen Funktion ϕ darstellen, d.h. $\mathbf{v} = \nabla u$ mit $\Delta u = 0$. Eine derartige Funktion u nennt man Geschwindigkeitspotential.

b) Zeigen Sie, dass der Realteil $u(x, y)$ einer analytischen komplexen Funktion $\Phi(z) = \Phi(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ eine harmonische Funktion ist.

c) Berechnen Sie das Geschwindigkeitsfeld und die Stromlinien für das komplexe Geschwindigkeitspotential $\Phi(z) = (a + \mathrm{i}b) \ln z,\ a, b \in \mathbf{R}$.

d) Diskutieren Sie das Strömungsfeld für $\Phi(z) = a\,(\ln(z + x_0) - \ln(z - x_0))$, $a, x_0 \in \mathbf{R}$. Wie lautet das Geschwindigkeitsfeld im Limes $x_0 \to 0,\ 2ax_0 = \mu = \text{const.}$?

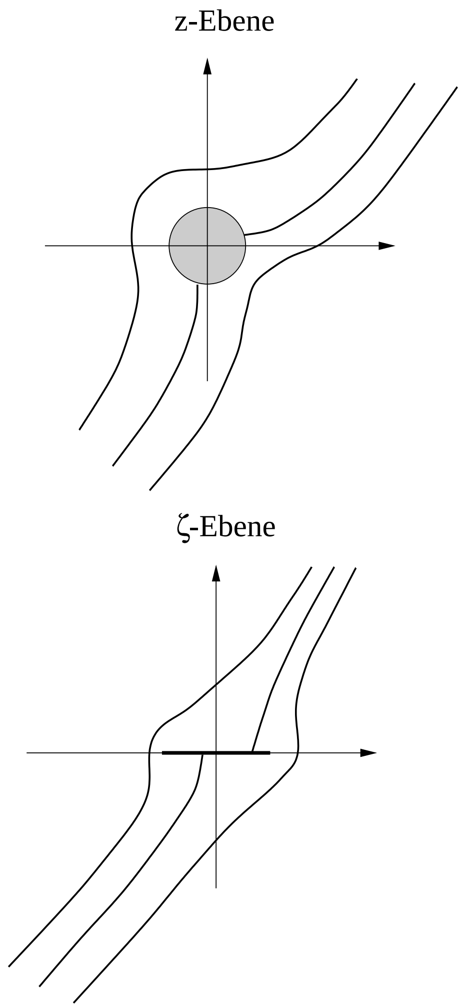
Aufgabe 2 (Votieraufgabe): **(3 Punkte)**

a) Untersuchen Sie die konforme Abbildung $\zeta = z + a^2/z$. Was ist das Bild eines Kreises, der in der z-Ebene den Mittelpunkt $M(0, y_0)$ hat und durch die beiden Punkte $P_1(-a, 0)$ und $P_2(a, 0)$ geht? Was ergibt sich für den Spezialfall $y_0 = 0$?

b) Wir beschränken uns im folgenden auf den Spezialfall, dass das Bild des Kreises eine Strecke ist, die eine umströmte Platte modellieren soll. Um das Strömungsprofil um diese Platte zu berechnen, betrachten Sie in der z-Ebene das komplexe Geschwindigkeitspotential

$$\Phi(\widetilde{z}) = v_0(\widetilde{z} + \frac{a^2}{\widetilde{z}}) + \frac{\Gamma}{2\pi \mathrm{i}} \ln \widetilde{z}$$

mit $\widetilde{z} = z \exp(-\mathrm{i}\beta)$. Dieses Potential beschreibt die Umströmung eines Zylinders unter einem Winkel β zur reellen Achse.



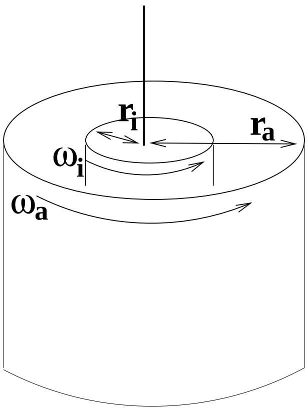
Schemazeichnung der Geometrie

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit an der umströmten Platte. Wählen Sie nun die Zirkulation Γ derart, dass die Singularität an der Hinterkante eliminiert wird (Abflussbedingung). Wie groß ist somit der Auftrieb der schräg angeströmten Platte in Abhängigkeit vom Anströmwinkel?

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung der Geschwindigkeit die Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\zeta}$$

Aufgabe 3 (Votieraufgabe): **(4 Punkte)**



Im Raum zwischen zwei konzentrischen, um die gemeinsame Achse rotierenden Zylindern (vgl. nebenstehendes Bild) entwickeln Newtonsche Flüssigkeiten das Geschwindigkeitsfeld der Couette-Strömung

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = v(r)\boldsymbol{e}_\phi = (\alpha r + \frac{\beta}{r}) \begin{pmatrix} -\sin\,\phi \\ \cos\,\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

($r^2 = x^2 + y^2$ und $\phi = \arctan\frac{y}{x}$)

a) Geben Sie α und β in Abhängigkeit der geometrischen und kinematischen Parameter r_i, r_a, ω_i und ω_a an. Betrachten Sie den Grenzfall ($r_a \to \infty, \omega_a \to 0$).

b) Bestimmen Sie die Wirbelstärke $\boldsymbol{\omega} = \text{rot}\boldsymbol{v}/2$ und die Wirbellinien von $v(x)$.
Welche Bewegung der lokalen Volumenelemente wird durch die beiden Beiträge zum Geschwindigkeitsfeld beschrieben?

c) Berechnen Sie die Zirkulation $\Gamma = \oint \boldsymbol{v}\mathrm{d}s$ des Geschwindigkeitsfeldes.

d) Betrachten Sie einen Kreis mit Radius r_0 um den Ursprung. Ist der Stokessche Satz auf diesem Gebiet erfüllt? Diskutieren Sie das Ergebnis.