

Übungsblatt 7
Theoretische Physik V : Kontinuumsmechanik
WS 2009/10

Fakultät Mathematik und Physik
Universität Stuttgart
Prof. Dr. R. Hilfer

Aufgabe 1 (Votieraufgabe):

(3 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie die Energiebilanz in *räumlicher* Formulierung kennengelernt. Leiten Sie analog zur Vorlesung die Energiebilanz in *materieller* Formulierung her.

Aufgabe 2 (Votieraufgabe):

(3 Punkte)

Wir betrachten ein Gebiet $G = G_1 + G_2$, in dem mit Ausnahme einer Unstetigkeitsfläche U alle den Zustand eines Kontinuums bestimmenden—von x , y , z und t abhängenden—Funktionen stetig differenzierbar sind und ihre rechts- und linksseitigen Grenzwerte bei Annäherung an U existieren. Es bedeuten \mathbf{u} die Geschwindigkeit von U und \mathbf{N} den zugehörigen Normaleneinheitsvektor, der in das Gebiet G_2 weisen möge. Läßt man eine Orts- und Zeitveränderlichkeit von G und seiner Berandung ∂G zu, so nimmt die Kontinuitätsgleichung die Form

$$\frac{d}{dt} \int_G \rho \, dV = 0$$

an.

Betrachtet man eine Funktion $\psi = \psi(x, y, z; t)$ und vollzieht man für diese Funktion den Grenzübergang zur Unstetigkeitsfläche U , so ergibt sich

$$\lim_{G \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \int_G \psi \, dV = \int_U [\psi_1 (\mathbf{u} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{N} - \psi_2 (\mathbf{u} - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{N}] \, dF. \quad (1)$$

(Zur Herleitung siehe unten.) Die Größen ψ_1 und ψ_2 stellen den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von ψ an U dar und \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 den links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von \mathbf{v} an U . \mathbf{v} ist die Geschwindigkeit der Materie relativ zu ∂G , die von \mathbf{u} als Geschwindigkeit von U in G zu unterscheiden ist, welche zur Lageveränderung von G_1 und G_2 in G führt.

- a) Zu welchem Ergebnis führt die Anwendung der Formel (1) auf die Kontinuitätsgleichung? Interpretieren Sie physikalisch.
- b) Schreiben Sie die Clausius-Duhem-Ungleichung aus der Thermodynamik für das Gebiet G in integraler Form. Wenden Sie die Formel (1) darauf an und beachten Sie das Ergebnis des Aufgabenteils a).
- c) Was ergibt sich aus b), wenn Sie als Material ein ideales Gas verwenden? Interpretieren Sie das Ergebnis.

Herleitung der Formel (1)

Zerlegung des Integrals in eine Summe über G_1 und G_2 :

$$\frac{d}{dt} \int_G \psi dV = \frac{d}{dt} \left(\int_{G_1} \psi dV + \int_{G_2} \psi dV \right). \quad (2)$$

Wir betrachten das Integral über G_1 . Die Ableitung $\frac{d}{dt}$ beschreibt die zeitliche Änderung des Volumenintegrals durch die Änderung von ψ einerseits und die Änderung des Integrationsgebietes andererseits. Da innerhalb von G_1 keine weiteren Unstetigkeiten vorhanden sind, heben sich dort die Nettoflüsse durch die Volumenelemente auf. Die einzigen Beiträge zum zweiten Term sind also die Flüsse durch die Oberflächen von G_1 :

$$\frac{d}{dt} \int_{G_1} \psi dV = \int_{G_1} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \sum_i \int_{\text{Flächen } i} \psi_i \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}_i dF, \quad (3)$$

wobei ψ_i der Grenzwert von ψ an und \mathbf{n}_i die Normalen auf die Oberflächen sind. \mathbf{w}_i ist die Geschwindigkeit der Fläche i . Damit ist $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}_i$ die Flußrate durch die Fläche i .

Das Gebiet G_1 ist durch die materielle Fläche F_1 und die Unstetigkeitsfläche U berandet. Die Summe in (3) lautet dann

$$\sum_i \int_{\text{Flächen } i} \psi_i \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}_i dF = \int_{F_1} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dF + \int_U \psi_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dF. \quad (4)$$

Dabei besitzen die Größen \mathbf{v}_i und ψ_i auf der materiellen Fläche F_1 die Werte \mathbf{v} und ψ .

Wir wollen nun den ersten Term auf der rechten Seite von (4) als Volumenintegral über das Gebiet G_1 schreiben. (Wenn ψ die Massendichte darstellt, so ergeben sich dann die Kontinuitätsgleichung und zusätzlich die Terme von der Unstetigkeitsfläche.) Dazu schreiben wir ihn als

$$\int_{F_1} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dF = \int_{F_1+U-U} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dF = \int_{\partial G_1} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dF + \int_{-U} \psi_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{N} dF \quad (5)$$

mit $\partial G_1 = F_1 + U$. Dabei ist das Integral über $-U$ gleich dem Integral über U mit negativ orientiertem $\mathbf{N} dF$.

Zusammenfassend erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \int_{G_1} \psi dV = \int_{G_1} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \int_{\partial G_1} \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dF + \int_U \psi_1 (\mathbf{u} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{N} dF. \quad (6)$$

Verwendet man für das Integral über die Fläche ∂G den Gaußschen Satz, der besagt, daß ein Oberflächenintegral über ein stetiges Vektorfeld gleich dem entsprechenden Volumenintegral über die Divergenz des Vektorfeldes ist, so ergibt sich aus (5) schließlich

$$\frac{d}{dt} \int_{G_1} \psi \, dV = \int_{G_1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla(\psi \mathbf{v}) \right] dV + \int_U \psi_1 (\mathbf{u} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{N} \, dF. \quad (7)$$

Eine analoge Beziehung erhält man für das Gebiet G_2 , so daß aus (2) letztendlich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_G \psi \, dV &= \int_{G_1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla(\psi \mathbf{v}) \right] dV + \int_{G_2} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla(\psi \mathbf{v}) \right] dV \\ &\quad + \int_U \psi_1 (\mathbf{u} - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{N} \, dF + \int_U \psi_2 (\mathbf{u} - \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{N} \, dF \end{aligned} \quad (8)$$

hervorgeht. Vollzieht man die beiden Grenzprozesse

$$G_1 \rightarrow 0, \quad G_2 \rightarrow 0$$

so, daß sich das Gebiet G auf die Unstetigkeitsfläche U zusammenzieht, dann ergibt sich aus (8) die Formel (1).

Aufgabe 3 (Hausaufgabe):

(8 Punkte)

Betrachten Sie ein System von geladenen Teilchen, auf die nur die Lorentzkraft des elektromagnetischen Feldes wirken soll.

- a) Begründen Sie die mechanische Impulsbilanz für den Gesamtimpuls $\mathbf{p}_V^{(mech)}$:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_V^{(mech)} = \int d^3r \, \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \int_V d^3r (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}).$$

(1 Punkt).

- b) Eliminieren Sie ρ und \mathbf{j} durch die inhomogenen Maxwell-Gleichungen. Bringen Sie die Terme auf die Form

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{B} - \frac{d}{dt} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E}$$

Hinweis: Homogene Maxwell-Gleichungen:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (9)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (10)$$

Inhomogene Maxwell-Gleichungen:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (11)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{j} \quad (12)$$

Materialgleichungen (lineares Medium):

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \quad (13)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (14)$$

(2 Punkte).

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Impulses des elektromagnetischen Feldes

$$\mathbf{p}_V^{(Feld)} = \int_V d^3r (\mathbf{D} \times \mathbf{B})$$

die Gesamtimpulsbilanz $\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_V^{(mech)} + \mathbf{p}_V^{(Feld)})$. Sie ist symmetrisch in magnetischen und elektrischen Größen. (1 Punkt).

d) Zeigen Sie, dass für ein lineares, homogenes Medium gilt:

$$(\mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} - \mathbf{D} \times \operatorname{rot} \mathbf{E})_i = \epsilon_r \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (E_i E_j - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ij})$$

und analog:

$$(\mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{H})_i = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (B_i B_j - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ij}).$$

(1 Punkt).

e) Mit Hilfe des Maxwellschen Spannungstensors \mathbf{T} kann die Impulsbilanz wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_V^{(mech)} + \mathbf{p}_V^{(Feld)}) = \int_V d^3r \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}.$$

Geben Sie T_{ij} an. (1 Punkt).

f) Formen Sie das Ergebnis aus e) mit Hilfe des Gaußschen Satzes um. Interpretieren Sie das Ergebnis. (1 Punkt).

g) Berechnen Sie die Kraft zwischen den Platten eines Kondensators ($\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} = (0, 0, -E)$). (1 Punkt).